

Durée : 50'

Calculatrice non autorisée

## Question 1

8 points

Déterminer une expression aussi simple que possible des ensembles suivants :

$$A = [3, +\infty[ \cap ]-2, 7[ = [3, 7[ \quad C = [-5, 6[ \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = ]-\sqrt{7}, -2] \cup ]-3, -\frac{8}{3}] = [-3, -2] \quad D = ]-\pi, 1] \cap ]\frac{7}{7}, 4] = \emptyset$$

## Question 2

22 (=4+6+4+8) points

Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

$$(1) \quad \frac{9x}{\frac{5}{-3}} = \frac{-6}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{5} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{6}{25} \quad \Leftrightarrow -15x = -6 \quad / : (-15)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3x}{5} = -\frac{6}{25} \quad \Leftrightarrow x = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{15x}{25} = -\frac{6}{25} \quad / \cdot 25 \quad S = \left\{ \frac{2}{5} \right\}$$

$$(2) \quad \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2}-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3x-1})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{3x+1})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\sqrt{6}x} - \sqrt{3}x - \sqrt{2} + 1 = \cancel{\sqrt{6}x} + \sqrt{3}x + \sqrt{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} = 2\sqrt{3}x \quad / : 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{3} \right\}$$

$$(3) \quad x^3 - 6x^2 = 5x - 30$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-6) = 5(x-6)$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-6) - 5(x-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x^2-5) = 0$$

$$S = \{6, \pm\sqrt{5}\}$$

$$\Leftrightarrow x=6 \text{ ou } x = \pm\sqrt{5}$$

$$(4) \quad \frac{3}{x^2 - 2x} - 1 = \frac{2+x}{2-x}$$

$$\text{C.E : } x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 2$$

$$2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$\frac{3}{x(x-2)} - \frac{x(x-2)}{x(x-2)} = \frac{(2+x) \cdot x}{x(2-x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - x(x-2)}{x(x-2)} + \frac{(2+x) \cdot x}{x(x-2)} = 0 \quad / \cdot x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 3 - \cancel{x^2} + 2x + 2x + \cancel{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$$

$$S = \left\{ -\frac{3}{4} \right\}$$

### Question 3

4 points

Paul a entre 150 € et 200 € dans sa tirelire. A la foire du livre, il dépense entre 35 € et 55 €. Que peut-on dire de la somme d'argent qu'il lui reste après cette visite ?

Soit  $c$  le capital de Paul :  $150 \leq c \leq 200$  ①

Soit  $d$  la dépense :  $35 \leq d \leq 55$   $/ \cdot (-1)$

$$-35 \geq -d \geq -55$$

$$-55 \leq -d \leq -35 \quad \text{②}$$

$$\text{①} + \text{②} : \quad 95 \leq c - d \leq 165$$

Il reste à Paul entre 95 et 165 €.

## Question 4

15 (=3+5+7) points

Résoudre les inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  et indiquer l'ensemble des solutions :

(1)  $-2x < \frac{1}{2} \quad | : (-2)$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$$

$$S = ]-\frac{1}{4}; +\infty[$$

(2)  $4^{-1}x + 3^{-2} < 2^{-1}\left(\frac{x}{2} + 4^{-1}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{1}{9} < \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{x}{4}} + \frac{1}{9} < \cancel{\frac{x}{4}} + \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{8} \quad \text{VRAI !}$$

$$\text{Donc } S = \mathbb{R}$$

(3)  $\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{4} - x\right) \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{x-1}{12} + \frac{x}{3} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x}{12} - \frac{x-1}{12} + \frac{4x}{12} \leq \frac{12}{12} \quad | \cdot 12$$

$$\Leftrightarrow 6x - x + 1 + 4x \leq 12$$

$$\Leftrightarrow 9x \leq 11 \quad | : 9$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{11}{9}$$

$$S = ]-\infty; \frac{11}{9}]$$

# Question 5

11 (=5+6) points

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < a \leq 2 & (1) \\ -3 \leq b < -\frac{3}{2} & (2) \end{cases}$$

Donner un encadrement de

a)  $2a - \frac{b}{3}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} < a \leq 2 \quad | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow & 1 < 2a \leq 4 \quad (3) \\ & -3 \leq b < -\frac{3}{2} \quad | : (-3) \\ \Leftrightarrow & 1 \geq -\frac{b}{3} > \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} < -\frac{b}{3} \leq 1 \quad (4) \end{aligned}$$

(3) + (4) :

$$\frac{3}{2} < 2a - \frac{b}{3} \leq 5$$

b)  $\frac{ab}{5}$

$$\begin{aligned} & -3 \leq b < -\frac{3}{2} \quad | \cdot (-1) \\ & 3 \geq -b > \frac{3}{2} \\ & \frac{3}{2} < -b \leq 3 \quad (5) \\ & \frac{1}{2} < a \leq 2 \quad (1) \end{aligned}$$

(1) · (5) :

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} < -ab \leq 6 \quad | : 5 \\ & \frac{3}{20} < -\frac{ab}{5} \leq \frac{6}{5} \quad | \cdot (-1) \\ & -\frac{3}{20} > \frac{ab}{5} \geq -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

G. Lorang