5M4 — Corrigé du devoir I,3 — 10.12.08

Question 1

(1) $x^4 - x^2y^2 + 9y^2 - 9x^2$

$= \left(x^4 - x^2y^2\right) + \left(9y^2 - 9x^2\right)$

$= x^2\left(x^2 - y^2\right) + 9\left(y^2 - x^2\right)$

$= x^2\left(x^2 - y^2\right) - 9\left(x^2 - y^2\right)$

$= \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 - 9\right)$

$= (x - y)(x + y)(x - 3)(x + 3)$

(2) $16(3x - 1)^2 - 25(x + 2)^2$

$= [4(3x - 1)]^2 - [5(x + 2)]^2$

$= [4(3x - 1) - 5(x + 2)][4(3x - 1) + 5(x + 2)]$

$= (12x - 4 - 5x - 10)(12x - 4 + 5x + 10)$

$= (7x - 14)(17x + 6)$

$= 7(x - 2)(17x + 6)$

(3) $-16ab^5 + 81a^5b$

$= 81a^5b - 16ab^5$

$= ab\left(81a^4 - 16b^4\right)$

$= ab\left(9a^2 - 4b^2\right)\left(9a^2 + 4b^2\right)$

$= ab(3a - 2b)(3a + 2b)\left(9a^2 + 4b^2\right)$

(4) $a^2 - 1 - 3(1 - a)(a + 2) - (a - 1)^2$

$= (a - 1)(a + 1) + 3(a - 1)(a + 2) - (a - 1)^2$

$= (a - 1)[(a + 1) + 3(a + 2) - (a - 1)]$

$= (a - 1)(a + 1 + 3a + 6 - a + 1)$

$= (a - 1)(3a + 8)$

(5) $4a^2 + 28a - 9b^2 + 49$

$= 4a^2 + 28a + 49 - 9b^2$

$= (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 7 + 7^2 - 9b^2$

$= (2a + 7)^2 - (3b)^2$

$= (2a + 7 - 3b)(2a + 7 + 3b)$

$= (2a - 3b + 7)(2a + 3b + 7)$

(6) $x^2 - y^2 - 4x + 2yz + 4 - z^2$

$= \left(x^2 - 4x + 4\right) - \left(y^2 - 2yz + z^2\right)$

$= (x - 2)^2 - (y - z)^2$

$= [(x - 2) - (y - z)][(x - 2) + (y - z)]$

$= (x - 2 - y + z)(x - 2 + y - z)$

Question 2

(1) a) $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$

$= (a + b)\left(a^2 + 2ab + b^2\right)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b) $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = ... = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

(2) On en déduit que :

$$\begin{aligned}A &= (x+1)^3 - (x-1)^3 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) \\ &= \cancel{x^3} + 3x^2 + \cancel{3x} + 1 - \cancel{x^3} + 3x^2 - \cancel{3x} + 1 \\ &= 6x^2 + 2\end{aligned}.$$

(3) On pose $x = 1000$ dans la formule précédente :

$$1001^3 - 999^3 = 6 \cdot 1000^2 + 2 = 6'000'002$$

Question 3

(1) $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{39}\right)^2 = 78$, $\left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72$, $\left(5\sqrt{3}\right)^2 = 75$ et $\left(3\sqrt{10}\right)^2 = 90$. Donc :

$$6\sqrt{2} < 5\sqrt{3} < \sqrt{2}\cdot\sqrt{39} < 3\sqrt{10}.$$

(2) $$\begin{aligned}B &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} - \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2-1} - \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3-1} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{1} - \frac{\cancel{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}} \\ &= \sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2} \\ &= \sqrt{3}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

Question 4

(1) On a :

$$\begin{aligned}&\text{aire}(ABC) \\ &= \text{aire}(MATH) - \text{aire}(AMB) - \text{aire}(ACT) - \text{aire}(BCH) \\ &= \sqrt{6}\cdot\sqrt{10} - \frac{x\sqrt{10}}{2} - \frac{x\sqrt{6}}{2} - \frac{\left(\sqrt{10}-x\right)\left(\sqrt{6}-x\right)}{2} \\ &= \sqrt{60} - \frac{x\sqrt{10}}{2} - \frac{x\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{60} - x\sqrt{10} - x\sqrt{6} + x^2}{2} \\ &= 2\sqrt{15} - \frac{\cancel{x\sqrt{10}} + \cancel{x\sqrt{6}} + 2\sqrt{15} - \cancel{x\sqrt{10}} - \cancel{x\sqrt{6}} + x^2}{2} \\ &= \frac{4\sqrt{15} - 2\sqrt{15} - x^2}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{15} - x^2}{2} = \sqrt{15} - \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

(2) ***Bonus*** :

$$\begin{aligned}&\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2}\text{aire}(MATH) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{15} - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{60} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{15} - \frac{x^2}{2} = \sqrt{15} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

G. Lorang