Nom : Corrigé Prénom : ....

5M4 Devoir de mathématiques II,1 7.02.2012

Durée : 60' ***Calculatrice non autorisée***

Question 1

12 (=3+6+3) points

(1) ***Démontrer*** que si a et b sont des réels positifs alors : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$(\forall a, b \in \mathbb{R}_+)$

- $\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{b} \geq 0$, donc $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$
- $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b$

Donc $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

(2) a) Quel est la valeur exacte du ***périmètre*** d'un carré dont l'aire est égale à 1000 km^2 ? b) La calculatrice donne : $\sqrt{10} = 3{,}1622777$. En déduire un encadrement au mètre près du périmètre précédent.

a) Périmètre : $4 \cdot \sqrt{1000} = 40 \cdot \sqrt{10}$ km

b) au mètre près = à 10^{-3} km près

$3{,}162277 < \sqrt{10} < 3{,}162278 \quad | \cdot 10$

$\Leftrightarrow 31{,}62277 < 10\sqrt{10} < 31{,}62278 \quad | \cdot 4$

$\Leftrightarrow 126{,}\underline{491}08 < 40\sqrt{10} < 126{,}\underline{491}12$

Donc $126{,}491 < 40\sqrt{10} < 126{,}492$ (en km) est l'encadrement cherché du périmètre

(3) Quel est ***l'aire*** d'un carré dont les diagonales mesurent $2\sqrt{2^{-1}}$ cm ?

Aire de ce carré

$\frac{(2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}})^2}{2} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}^2$

Question 2 17 (=5+8+4) points

Calculer et ***simplifier*** autant que possible les expressions suivantes :

(1) $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{27}{4}} - \frac{1}{\sqrt{75}}$

$= 4\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{5\sqrt{3}}$

$= 4\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{15}$

$= \frac{120\sqrt{3}}{30} - \frac{45\sqrt{3}}{30} - \frac{2\sqrt{3}}{30} = \frac{73\sqrt{3}}{30}$

(2) $\frac{2\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} - \frac{4-7\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$

$= \frac{2\sqrt{3}(5-3\sqrt{3})}{(5+3\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})} - \frac{(4-7\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}}{4\cdot 3}$

$= \frac{10\sqrt{3}-18}{25-27} - \frac{4\sqrt{3}-21}{12}$

$= \frac{10\sqrt{3}-18}{-2} - \frac{4\sqrt{3}-21}{12}$

$= \frac{108-60\sqrt{3}-4\sqrt{3}+21}{12} = \frac{129-64\sqrt{3}}{12}$

(3) $\frac{\sqrt{675}}{3} - \frac{5}{\sqrt{675}}$

$\sqrt{675} = \sqrt{3^3\cdot 5^2} = 15\sqrt{3}$

675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

Donc $\frac{\sqrt{675}}{3} - \frac{5}{\sqrt{675}}$

$= 5\sqrt{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}$

$= \frac{44\sqrt{3}}{9}$

Question 3 14 (=4+6+4) points

(1) ***Ranger*** les nombres suivants par ***ordre croissant*** en justifiant :

$$a = \sqrt{150}\ ;\ b = 7\sqrt{3}\ ;\ c = \frac{\sqrt{320}}{\sqrt{2}}.$$

$a^2 = 150$ $\quad b^2 = 49 \cdot 3 = 147 \quad c^2 = 160$

Comme a, b et c sont ≥ 0 on a donc

$$b < a < c$$

$$7\sqrt{3} < \sqrt{150} < \frac{\sqrt{320}}{\sqrt{2}}$$

(2) ***Comparer*** : $x = \sqrt{6} - 2$ et $y = 2\sqrt{3} - 3$

$\sqrt{6} - 2 < 2\sqrt{3} - 3 \quad | +2$

$\Leftrightarrow \sqrt{6} < 2\sqrt{3} - 1 \quad | (\ )^2$

$\Leftrightarrow 6 < 4 \cdot 3 - 4\sqrt{3} + 1$

$\Leftrightarrow 6 < 13 - 4\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3} < 13 - 6$

$\Leftrightarrow \underbrace{4\sqrt{3}}_{+} < \underbrace{7}_{+} \quad | (\ )^2$

$\Leftrightarrow 48 < 49$ VRAI !

Donc $x < y$

(3) Donner un ***encadrement*** de $18 - 5\sqrt{6}$ par deux entiers consécutifs.

$5\sqrt{6} = \sqrt{25 \cdot 6} = \sqrt{150}$

et $12 < \sqrt{150} < 13$

Donc : $12 < 5\sqrt{6} < 13 \quad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow -12 > -5\sqrt{6} > -13 \quad | +18$

$\Leftrightarrow 6 > 18 - 5\sqrt{6} > 5$

$\Leftrightarrow 5 < 18 - 5\sqrt{6} < 6$

5 et 6 sont les deux entiers cherchés

Question 4 — 10 (=6+4) points

Calculer $A = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x} - 1$ lorsque a) $x = \sqrt{5} - 1$ et b) $x = -2 \cdot 10^{-1}$

a) $A = \dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{5}-1} - 1$

$= \dfrac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}+1}{5-1} - 1$

$= \dfrac{6 - 2\sqrt{5}}{2} - \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} - 1$

$= \dfrac{12 - 4\sqrt{5} - \sqrt{5} - 1 - 4}{4} = \dfrac{7 - 5\sqrt{5}}{4}$

b) $A = \dfrac{\cancel{4}^{2} \cdot 10^{-2}}{\cancel{2}_{1}} + \dfrac{1}{2 \cdot 10^{-1}} - 1$

$= \dfrac{2}{100} + \dfrac{10}{2} - 1 = 4 + 0{,}02 = 4{,}02$

Question 5 — 7 (=4+3) points

Simplifier les expressions suivantes, sachant que a et b sont des nombres réels strictement positifs.

(1) $\sqrt{3a^7 b} \cdot \sqrt{3a^5 \sqrt{b^8}}$ (2) $\left(2\sqrt{\left(a^{12}\right)^5}\right)^3$

(1) $\sqrt{3a^7 b} \cdot \sqrt{3a^5 \sqrt{b^8}}$ $\quad (\sqrt{b^8} = b^4)$

$= \sqrt{3^2 a^{12} \cdot b^5}$

$= 3 \cdot a^6 \cdot b^2 \cdot \sqrt{b}$

(2) $\left(2\sqrt{(a^{12})^5}\right)^3 = 8\left(\sqrt{a^{60}}\right)^3 = 8 \cdot (a^{30})^3$

$= 8 \cdot a^{90}$

G. Lorang