

Durée : 55'

Calculatrice non autorisée

Question 1

20 (=5x4) points

Calculer et simplifier (on ne demande pas les conditions d'existence) :

$$(1) \quad A = \frac{a^6 - 2a^5}{2a^6} - \frac{a+1}{4(a-3)}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{a^5(a-2)}{2a^6} - \frac{a+1}{4(a-3)} \\
 &= \frac{2(a-2)(a-3)}{4a(a-3)} - \frac{(a+1) \cdot a}{4a(a-3)} \\
 &= \frac{2(a^2-3a-2a+6)}{4a(a-3)} - \frac{a^2+a}{4a(a-3)} \\
 &= \frac{2a^2-10a+12-a^2-a}{4a(a-3)} \\
 &= \frac{a^2-11a+12}{4a(a-3)}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad B = \frac{1}{x^2 - 2xy} + \frac{4}{4y^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{x(x-2y)} + \frac{4}{(2y-x)(2y+x)} \\
 &= \frac{x+2y}{x(x-2y)(x+2y)} - \frac{4x}{x(x-2y)(x+2y)} \\
 &= \frac{-3x+2y}{x(x-2y)(x+2y)}
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad C = \frac{2x-1}{x^2+2x} \cdot \frac{5x+10}{x-4x^3} \cdot x^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2x-1}{x(x+2)} \cdot \frac{5(x+2)}{x(1-4x^2)} \cdot x^2 \\
 &= \frac{\cancel{(2x-1)} \cdot 5 \cdot \cancel{(x+2)} \cdot x^2}{\cancel{x} \cdot \cancel{(x+2)} \cdot \cancel{(1-2x)} \cdot (1+2x)} \\
 &= -\frac{5}{2x+1}
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad D = \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{1 + \frac{1}{1-x^2}}$$

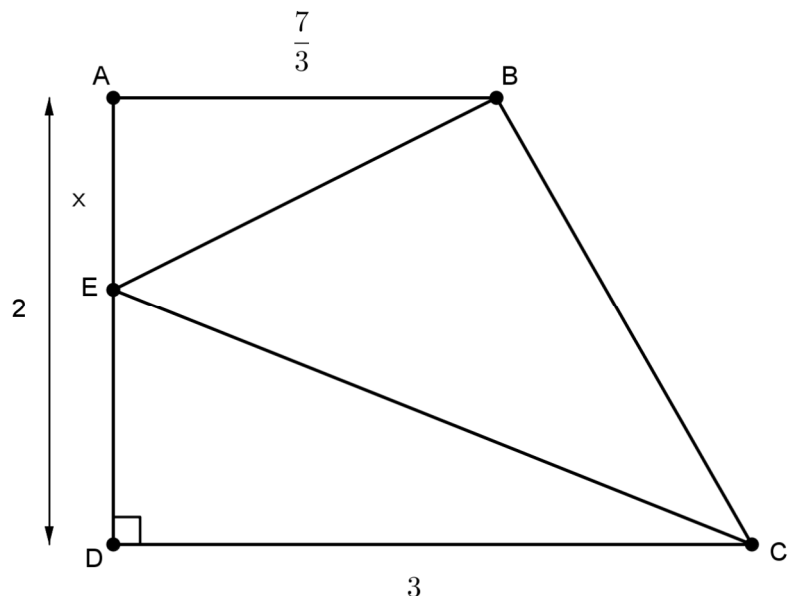
$$\begin{aligned}
 D &= \frac{\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1-x^2+1}{1-x^2}} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2-x^2}{(1-x)(1+x)}} \\
 &= \frac{x}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{(1-x)\cancel{(1+x)}}{2-x^2} = \frac{x \cdot (1-x)}{2-x^2}
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad E = \frac{a^{-3}}{2b} + \frac{a^2}{b^{-3}} : a^4$$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{a^{-3}}{2b} \cdot \frac{1}{b^{-2}} + \frac{a^2}{b^{-3}} \cdot \frac{1}{a^4} \\
 &= \frac{b^2}{2ba^3} + \frac{b^3}{a^2} \\
 &= \frac{b}{2a^3} + \frac{b^3}{a^2} = \frac{b+2ab^3}{2a^3} = \frac{b(1+2ab^2)}{2a^3}
 \end{aligned}$$

Question 2

10 (=2+6+2) points



Sur la figure ci-dessus, qui n'est pas exacte, $ABCD$ est un trapèze rectangle en A tel que $AB = \frac{7}{3}$, $CD = 3$ et $AD = 2$. E est un point du côté $[AD]$ tel que $AE = x$.

- (1) Déterminer l'aire du trapèze $ABCD$.

$$[ABCD] = \frac{\frac{7}{3} + 3}{2} \cdot 2 = \frac{7}{3} + 3 = \frac{16}{3}$$

- (2) Déterminer en fonction de x l'aire du triangle EBC .

$$\begin{aligned} [EBC] &= [ABCD] - [EAB] - [ECD] \\ &= \frac{16}{3} - \frac{\frac{7}{3} \cdot x}{2} - \frac{(2-x) \cdot 3}{2} \\ &= \frac{16}{3} - \frac{7x}{6} - \frac{6-3x}{2} \\ &= \frac{16}{3} - \frac{7x}{6} - \frac{3}{2} + \frac{3x}{2} \\ &= \frac{7}{3} - \frac{7x}{6} + \frac{3x}{2} = \frac{7}{3} + \frac{x}{3} \end{aligned}$$

- (3) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle EBC vaut la moitié de l'aire du trapèze $ABCD$.

$$\begin{aligned}
 [EBC] &= \frac{1}{2} [ABCD] \\
 \Leftrightarrow \frac{7}{3} + \frac{x}{3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \\
 \Leftrightarrow \frac{7}{3} + \frac{x}{3} &= \frac{8}{3} \\
 \Leftrightarrow \frac{x}{3} &= \frac{1}{3} \quad | \cdot 3 \quad \Leftrightarrow x = 1
 \end{aligned}$$

Question 3

12 (=9+3) points

Comment peut-on faire les calculs suivants le plus simplement possible :

(1) a) 79^2

b) $401 \cdot 399$

c) 15^4

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad 79^2 &= (80-1)^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 \cdot 1 + 1 \\
 &= 6400 - 160 + 1 \\
 &= 6241 \\
 \text{b)} \quad 401 \cdot 399 &= (400+1)(400-1) \\
 &= 400^2 - 1 = 160000 - 1 = 159999 \\
 \text{c)} \quad 15^2 &= (10+5)^2 = 100 + 2 \cdot 10 \cdot 5 + 25 = 225 \\
 15^4 &= (15^2)^2 = 225^2 = (200+25)^2 \\
 &= 200^2 + 2 \cdot 200 \cdot 25 + 25^2 \\
 &= 40000 + 10000 + 625 \\
 &= 50625
 \end{aligned}$$

(2) $(\sqrt{7}-2)^4 (\sqrt{7}+2)^4$

$$\begin{aligned}
 &(\sqrt{7}-2)^4 (\sqrt{7}+2)^4 \\
 &= [(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)]^4 \\
 &= (7-4)^4 \\
 &= 3^4 \\
 &= 81
 \end{aligned}$$

Question 4

18 (=8+10) points

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} et préciser l'ensemble de solutions :

$$(1) \quad \frac{x+6}{5} - \frac{11x}{60} = 2 - \frac{8x-15}{12}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{12x+72}{60} - \frac{11x}{60} = \frac{120}{60} - \frac{40x-75}{60} \quad | \cdot 60 \\ \Rightarrow & \underline{12x+72} - \underline{11x} = \underline{120} - \underline{40x+75} \\ \Rightarrow & x+72 = 120-40x \\ \Rightarrow & x+40x = 120-72 \\ \Rightarrow & 41x = 48 \quad | :41 \\ \Rightarrow & x = \frac{48}{41} \\ & S = \left\{ \frac{48}{41} \right\} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{417}{2} - \left(x - \frac{1}{2} \right) (4x+1) = \frac{5x}{3} - (2x-7)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{417}{2} - \left(4x^2 + x - 2x - \frac{1}{2} \right) = \frac{5x}{3} - (4x^2 - 28x + 49) \\ \Rightarrow & \frac{417}{2} - 4x^2 + x + \frac{1}{2} = \frac{5x}{3} - 4x^2 + 28x - 49 \\ \Rightarrow & 209 + x = \frac{5x}{3} + 28x - 49 \\ \Rightarrow & 209 + 49 = \frac{5x}{3} - x + 28x \\ \Rightarrow & 258 = \frac{5x}{3} + 27x \\ \Rightarrow & 258 = \frac{86x}{3} \quad | \cdot \frac{3}{86} \\ \Rightarrow & x = \frac{258 \cdot 3}{86} = 9 \quad S = \{9\} \end{aligned}$$