

Nom : Corrège

Prénom :

5M4

Devoir de mathématiques III,1

15.05.2012

Durée : 55'

Calculatrice autorisée

Question 1

12 (=4+4+4) points

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

(1) $(2x-1)x^2 = -5(1-2x)$

\Rightarrow	$(2x-1)x^2 + 5(1-2x) = 0$								
\Rightarrow	$(2x-1)x^2 - 5(2x-1) = 0$								
\Leftrightarrow	$(2x-1)(x^2-5) = 0$								
\Leftrightarrow	$(2x-1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0$								
\Leftrightarrow	$2x-1=0$ ou $x-\sqrt{5}=0$ ou $x+\sqrt{5}=0$								
\Leftrightarrow	$x = \frac{1}{2}$ ou $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$								
	$S = \left\{ \frac{1}{2}; \pm\sqrt{5} \right\}$								

(2) $(3x-1)(x^2-4) + (2-x)(9x^2-1) = 0$

\Leftrightarrow	$(3x-1)(x-2)(x+2) + (2-x)(3x-1)(3x+1) = 0$								
\Leftrightarrow	$(3x-1)(x-2)(x+2) - (x-2)(3x-1)(3x+1) = 0$								
\Leftrightarrow	$(3x-1)(x-2) [(x+2) - (3x+1)] = 0$								
\Leftrightarrow	$(3x-1)(x-2)(x+2-3x-1) = 0$								
\Leftrightarrow	$(3x-1)(x-2)(-2x+1) = 0$								
\Leftrightarrow	$x = \frac{1}{3}$ ou $x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$								
	$S = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2 \right\}$								

(3) $(x^2+7)(-9x^2-42x-49) = 0$

\Leftrightarrow	$x^2+7=0$ ou $-9x^2-42x-49=0$	$\cdot (-1)$
\Leftrightarrow	$x^2=-7$ ou $9x^2+42x+49=0$	
\Leftrightarrow	impossible	$(3x+7)^2=0$
\Leftrightarrow		$3x+7=0$
\Leftrightarrow		$x = -\frac{7}{3}$
	$S = \left\{ -\frac{7}{3} \right\}$	

Question 2

10 points

Résoudre l'équation rationnelle suivante en indiquant les conditions d'existence :

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{3}{(x-1)(2-x)} = \frac{10}{(x^2-4)(1-x)}$$

C.E :	$\left\{ \begin{array}{l} x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \\ x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \\ 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \\ 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \end{array} \right.$
	$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{ \pm 2; 1 \}$
$(\forall x \in \mathcal{D})$	$\frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{3}{(x-1)(x-2)} = \frac{-10}{(x-2)(x+2)(x-1)}$
\Leftrightarrow	$\frac{x(x-1)}{(x-2)(x+2)(x-1)} - \frac{3(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{-10}{(x-2)(x+2)(x-1)}$
\Leftrightarrow	$x(x-1) - 3(x+2) = -10$
\Leftrightarrow	$x^2 - x - 3x - 6 = -10$
\Leftrightarrow	$x^2 - 4x + 4 = 0$
\Leftrightarrow	$(x-2)^2 = 0$
\Leftrightarrow	$x=2 \text{ à écarter car } 2 \notin \mathcal{D}$
	$S = \emptyset$

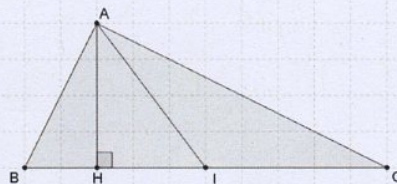
Question 6

12 (=6+6) points

- (1) Soit ABC un triangle tel que : $AB = 2 - \sqrt{2}$, $BC = 2 + \sqrt{2}$ et $AC = 2\sqrt{3}$. Ce triangle est-il rectangle ? Si oui, quel est le sommet de l'angle droit ?

$AC = 2\sqrt{3} \approx 3,46$	} $\Rightarrow [AC] = \text{côté le plus long}$
$BC = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41$	
$AB = 2 - \sqrt{2} \approx 0,41$	
Test : $(2 - \sqrt{2})^2 + (2 + \sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2$	
$\Leftrightarrow 4 - 4\sqrt{2} + 2 + 4 + 4\sqrt{2} + 2 = 4 \cdot 3$	
$\Leftrightarrow 6 + 6 = 12 \quad \text{VRAI !}$	
Donc le ΔABC est rectangle en B, d'après la réciproque du théorème de Pythagore	

- (2) Sur la figure ci-contre, H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC et $I = \text{mil}[BC]$. On donne : $BC = 10$, $IH = 3$ et $HA = 4$. Calculer AI et en déduire la nature du triangle ABC .



Th. de Pythagore dans le ΔAHI , rectangle en H :
$AH^2 + HI^2 = AI^2$
$\Leftrightarrow 4^2 + 3^2 = AI^2$
$\Leftrightarrow AI^2 = 25$
$\Leftrightarrow AI = 5$
Donc $IA = IB = IC = 5$, c.à.d.
I est le centre du cercle circonscrit du ΔABC . Or $I = \text{mil}[BC]$. Donc, d'après le th. du cercle de Thalès, le ΔABC est rectangle en A.

G. Lorang