

Durée : 55'

Calculatrice non autorisée

Question 1

- (1) Ecrire $A = \left(\frac{2000 \cdot 10^{-5}}{0,004 \cdot 10^4} \right)^{-3}$ en notation scientifique.

$$A = \left(\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4} \right)^{-3} = \left(\frac{10^{-2}}{2 \cdot 10} \right)^{-3} = \left(2^{-1} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1} \right)^{-3}$$

$$= 8 \cdot (10^{-3})^{-3} = 8 \cdot 10^9$$

- (2) Calculer et mettre sous forme de fraction irréductible $B = \frac{5 - 2 \cdot 2^{-3}}{2^{-2} + 5 \cdot (-3)^{-1}}$

$$B = \frac{5 - 2 \cdot \frac{1}{2^3}}{\frac{1}{4} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{5 - \frac{2}{8}}{\frac{1}{4} - \frac{5}{3}}$$

$$= \frac{5 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - \frac{5}{3}} = \frac{\frac{20}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{12} - \frac{20}{12}} = \frac{\frac{19}{4}}{-\frac{17}{12}}$$

$$= -\frac{19}{4} \cdot \frac{12}{17} = -\frac{57}{17}$$

- (3) Mettre $C = \frac{5^{-4} \cdot 50^{-3} \cdot 8^5}{25}$ sous la forme d'une puissance.

$$C = \frac{5^{-4} \cdot (2 \cdot 5^2)^{-3} \cdot (2^3)^5}{5^2}$$

$$= \frac{5^{-4} \cdot 2^{-3} \cdot 5^{-6} \cdot 2^{15}}{5^2}$$

$$= 5^{-10} \cdot 2^{12} \cdot 5^{-2} = \frac{2^{12}}{5^{12}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{12}$$

Question 2

(1) Donner le *nom de la propriété* qui permet d'écrire que :

- a) $2x + 3 = 3 + 2x$ commutativité de l'addition
 b) $2x + 3 = x \cdot 2 + 3$ commutativité de la multiplication
 c) $2(x + 3) = 2x + 6$ distributivité de la mult. p.r. à l'addition
 d) $2 \cdot (3x) = 6x$ associativité de la multiplication
 e) $1x = x$ élément neutre de la multiplication

(2) Est-ce que la division dans \mathbb{R}^* est associative ? Justifier la réponse !

La division n'est pas associative car p. ex:															
$(20 : 10) : 2 = 2 : 2 = 1$ mais															
$20 : (10 : 2) = 20 : 5 = 4 \quad (\neq 1)$															

Question 3

Effectuer les expressions suivantes en utilisant autant que possible les identités remarquables :

(1) $\left(5x^2 + 2y - \frac{4}{3}\right)\left(5x^2 - 2y + \frac{4}{3}\right)$

$= [5x^2 + (2y - \frac{4}{3})][5x^2 - (2y - \frac{4}{3})]$															
$= (5x^2)^2 - (2y - \frac{4}{3})^2$															
$= 25x^4 - (4y^2 - 2 \cdot 2y \cdot \frac{4}{3} + \frac{16}{9})$															
$= 25x^4 - 4y^2 + \frac{16y}{3} - \frac{16}{9}$															

$$(2) \quad (-x^6 + 3)(x^{12} + 9)(x^6 + 3)$$

$$= -(x^6 - 3)(x^{12} + 9)(x^6 + 3)$$

$$= -(x^6 - 3)(x^6 + 3)(x^{12} + 9)$$

$$= -(x^{12} - 9)(x^{12} + 9)$$

$$= -(x^{24} - 81)$$

$$= -x^{24} + 81$$

$$(3) \quad \left(3a + \frac{4b}{5}\right)\left(\frac{2b}{3} - a\right) - \left(\frac{a}{2} - b\right)^2$$

$$= \cancel{3a} \cdot \frac{2b}{3} - 3a^2 + \frac{8b^2}{15} - \frac{4ab}{5} - \left(\frac{a^2}{4} - \cancel{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot b + b^2\right)$$

$$= \underline{2ab} - \underline{3a^2} + \frac{8b^2}{15} - \frac{4ab}{5} - \underline{\frac{a^2}{4}} + \underline{ab} - b^2$$

$$= 3ab - \frac{4ab}{5} - 3a^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{8b^2}{15} - b^2$$

$$= \frac{15ab - 4ab}{5} - \frac{12a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{8b^2}{15} - \frac{15b^2}{15}$$

$$= \frac{11ab}{5} - \frac{13a^2}{4} - \frac{7b^2}{15}$$

$$(4) \quad -\frac{5v}{6} \left(\frac{3}{v} + \frac{2v}{15} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{5v}{6} \left(\frac{9}{v^2} + 2 \cdot \frac{3}{v} \cdot \frac{2v}{15} + \frac{4v^2}{225} \right) \\
 &= -\frac{5v \cdot 9^3}{6v^2} - \frac{5v}{6} \cdot \frac{4^2}{8} - \frac{5v \cdot 4v^2}{6 \cdot 225} \\
 &= -\frac{15}{2v} - \frac{2v}{3} - \frac{2v^3}{135}
 \end{aligned}$$

Question 4

Factoriser (si possible) les expressions suivantes en mettant en évidence les facteurs communs ou en utilisant les identités remarquables :

$$(1) \quad \frac{8x^2}{9} - \frac{x^4}{81} - 16$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{x^4}{81} + \frac{8x^2}{9} - 16 \\
 &= -\left[\left(\frac{x^2}{9} \right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{9} \cdot 4 + 4^2 \right] \\
 &= -\left(\frac{x^2}{9} - 4 \right)^2 = -\left(\frac{x}{3} - 2 \right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2 \right)^2
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad 135a^4b + 360a^3b^3 + 240a^2b^5$$

$$\begin{aligned}
 &= 15a^2b(9a^2 + 24ab^2 + 16b^4) \\
 &= 15a^2b \left[(3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 4b^2 + (4b^2)^2 \right] \\
 &= 15a^2b (3a + 4b^2)^2
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad (x^4 - 5)^2 - 8(x^4 - 5) + 16$$

$$\begin{aligned}
 &= (x^4 - 5)^2 - 2 \cdot (x^4 - 5) \cdot 4 + 4^2 \\
 &= [(x^4 - 5) - 4]^2 \\
 &= (x^4 - 5 - 4)^2 \\
 &= (x^4 - 9)^2 = (x^2 - 3)^2 (x^2 + 3)^2
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad (37x^2 - 7x - 4)^2 - (12x^2 - 7x + 5)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= [(37x^2 - 7x - 4) - (12x^2 - 7x + 5)] \cdot \\
 &\quad [(37x^2 - 7x - 4) + (12x^2 - 7x + 5)] \\
 &= (37x^2 - \cancel{7x} - 4 - 12x^2 + \cancel{7x} - 5) \cdot \\
 &\quad (37x^2 - 7x - 4 + 12x^2 - 7x + 5) \\
 &= (25x^2 - 9)(49x^2 - 14x + 1) \\
 &= (5x - 3)(5x + 3) \cdot [(7x)^2 - 2 \cdot 7x \cdot 1 + 1^2] \\
 &= (5x - 3)(5x + 3) \cdot (7x - 1)^2
 \end{aligned}$$