

Prénom :

24.04.2013

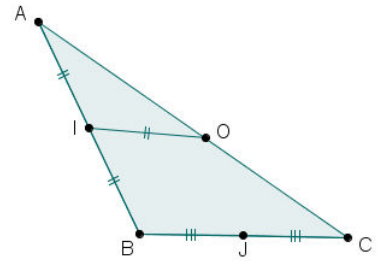
Calculatrice autorisée

Enoncer et démontrer le théorème du cercle de Thalès (+ figure soignée !).

Voir cours.

Question 2

Sur la figure ci-contre, on a : $O \in [AC]$, $I = \text{mil}[AB]$, $J = \text{mil}[BC]$ et $IA = IB = IO$.



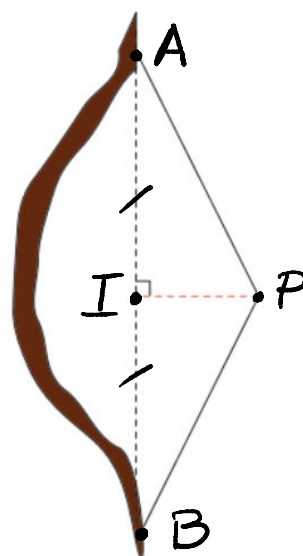
- (1) Quelle est la nature du triangle AOB ?
- (2) Montrez que le triangle JOC est isocèle.

(1) Comme la médiane $[OI]$ mesure la moitié du côté $[BC]$, on a d'après la réciproque du théorème de la médiane que $\triangle AOB$ est rectangle en O .

(2) Comme $\widehat{AOB} = 90^\circ$, on a aussi $\widehat{BOC} = 90^\circ$, car les points A, O et C sont alignés. Donc le $\triangle BOC$ est aussi rectangle en O . D'après le théorème de la médiane dans ce triangle, la médiane $[OJ]$ mesure la moitié de l'hypoténuse $[BC]$. Donc $OJ = JC$, c'est-à-dire le $\triangle OJC$ est isocèle en J .

Question 3

- (1) La corde élastique de l'arc a une longueur au repos de 60 cm.
Quelle est la nouvelle longueur de la corde si on l'écarte de cette position en la tirant par son milieu de 11 cm ? Donner la réponse au 10° de mm près. (On pourra annoter la figure.)



$I = \text{mil}[AB] \Rightarrow AI = 60 : 2 = 30 \text{ cm}$
D'après le théorème de Pythagore dans le $\triangle AIP$, rectangle en I

$$AI^2 + IP^2 = AP^2$$

$$\Leftrightarrow 30^2 + 11^2 = AP^2$$

$$\Leftrightarrow AP^2 = 1021$$

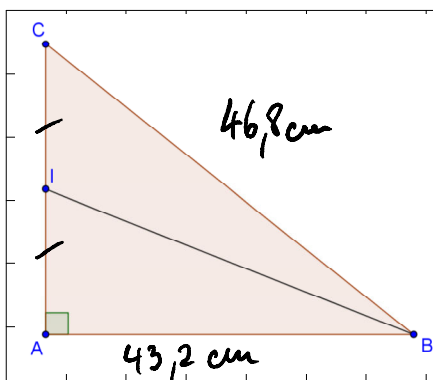
$$\Leftrightarrow AP = \sqrt{1021}$$

La nouvelle longueur de la corde est :

$$2 \cdot AP = 2\sqrt{1021} \simeq 63,91 \text{ cm (au } 10^{\circ} \text{ de mm près)}$$

Question 4

Dans un triangle ABC , rectangle en A , on note $I = \text{mil}[AC]$ et on donne : $AB = 43,2 \text{ cm}$ et $BC = 46,8 \text{ cm}$. Faire un croquis et déterminer la longueur de la médiane $[BI]$ au mm près.



D'après le théorème de Pythagore dans le $\triangle ABC$, rectangle en A :

$$AC^2 + 43,2^2 = 46,8^2$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 46,8^2 - 43,2^2$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 324$$

$$\Leftrightarrow AC = 18 \text{ cm}$$

Donc $AI = 9 \text{ cm}$. D'après le th. de Pythagore dans le $\triangle AIB$, rectangle en A :

$$AI^2 + AB^2 = IB^2$$

$$\Leftrightarrow IB \simeq 44,1 \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow 9^2 + 43,2^2 = IB^2$$

$$\Leftrightarrow IB^2 = 1947,24$$

Question 5

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} et donner l'ensemble de solutions :

(1) $(a^2 - 6)(a^2 + \sqrt{8}a) = 2(6 - a^2)$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 6)(a^2 + \sqrt{8}a) - 2(6 - a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 6)(a^2 + \sqrt{8}a) + 2(a^2 - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 6)(a^2 + \sqrt{8}a + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 6)(a^2 + 2\sqrt{2}a + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 6)(a + \sqrt{2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad a + \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a = +\sqrt{6} \quad \text{ou} \quad a = -\sqrt{6} \quad \text{ou} \quad a = -\sqrt{2}$$

$$S = \{+\sqrt{6}, -\sqrt{6}, -\sqrt{2}\}$$

(2) $(x^2 - 2x + 10)^2 - 4(x + 3)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow [(x^2 - 2x + 10) - 2(x + 3)] \cdot$$

$$[(x^2 - 2x + 10) + 2(x + 3)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 10 - 2x - 6)(x^2 - \cancel{2x} + 10 + \cancel{2x} + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2(x^2 + 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{impossible}$$

$$S = \{2\}$$

$$(3) \quad \frac{2(2x-1)}{3} + \frac{3(x-1)}{2} - \frac{9(x-4)}{5} = \frac{4(3-2x)}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-2}{3} + \frac{3x-3}{2} - \frac{9x-36}{5} = \frac{12-8x}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-2}{3} + \frac{3x-3}{2} = \frac{12-8x+9x-36}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-2}{3} + \frac{3x-3}{2} = \frac{x-24}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{40x-20}{30} + \frac{45x-45}{30} = \frac{6x-144}{30} \quad | \cdot 30$$

$$\Leftrightarrow 40x - 20 + 45x - 45 = 6x - 144$$

$$\Leftrightarrow 85x - 65 = 6x - 144$$

$$\Leftrightarrow 79x = -79$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$S = \{-1\}$$