

Durée : 60'

Calculatrice non autorisée

Question 1

15 (=5+3+2+5) points

(1) Énoncer l'associativité et la symétrie de la multiplication.

a) (\mathbb{R}, \cdot) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
 La multiplication est associative dans \mathbb{R}

b) (\mathbb{R}^*, \cdot) $(\forall a \in \mathbb{R}^*) (\exists b \in \mathbb{R}^*) / a \cdot b = b \cdot a = 1$
 En effet, $a \cdot b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{a}$.
 b est l'inverse de a
 La multiplication est symétrique dans \mathbb{R}^*

(2) Est-ce que la soustraction est associative ? Justifier la réponse.

Non car par exemple :

$$(3 - 4) - 5 = -1 - 5 = -6$$

$$\text{mais } 3 - (4 - 5) = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4 \quad] \neq$$

Donc en général : $(a - b) - c \neq a - (b - c)$

(3) Est-ce que la division est commutative ? Justifier la réponse.

Non car par exemple : $1 : 2 = 0,5$ mais $2 : 1 = 2$ (résultats \neq) Donc en général $a : b \neq b : a$

(4) Quel est le nom de la propriété des opérations permettant d'écrire que :

- a) $24 \cdot 75 = 12 \cdot 150$? L'associativité de la \cdot
 $(12 \cdot 2) \quad (2 \cdot 75)$
- b) $1 \cdot a^4 = a^4$? L'élément neutre de la \cdot
- c) $6 \cdot 304 = 1800 + 24$? la distributivité de \cdot par rapport à $+$
 $6 \cdot 300 \quad 6 \cdot 4$
- d) $1000 + 15 = 997 + 18$? L'associativité de $+$
 $(997 + 3) \quad (3 + 15)$
- e) $6x^2 - 7x = x(6x - 7)$ La distributivité de \cdot par rapport à $-$

Question 2

6 points

Montrer que $\frac{\frac{3^{-2}}{3} - \frac{2^{-2}}{2^2}}{(4 \cdot 3^{-1} - 3 \cdot 2^{-1})^4}$ est un entier !

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{3^{-2}}{3} - \frac{2^{-2}}{2^2}}{(4 \cdot 3^{-1} - 3 \cdot 2^{-1})^4} = \frac{\frac{1}{3^3} - \frac{1}{2^4}}{\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)^4} \\
 & = \frac{\frac{1}{27} - \frac{1}{16}}{\left(\frac{8}{6} - \frac{9}{6}\right)^4} = \frac{\frac{16-27}{16 \cdot 27}}{\left(-\frac{1}{6}\right)^4} \\
 & = \frac{-\frac{11}{16 \cdot 27}}{\frac{1}{6^4}} = -\frac{11 \cdot 6^4}{2^4 \cdot 3^3} \\
 & = -\frac{11 \cdot \cancel{2^4} \cdot \cancel{3^4}}{\cancel{2^4} \cdot \cancel{3^3}} = -33 \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Question 3

6 points

Calculer et mettre en notation scientifique : $\frac{(-30)^8 \cdot 0,004^5}{0,06^6 \cdot 32}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-30)^8 \cdot 0,004^5}{0,06^6 \cdot 32} = \frac{3^8 \cdot 10^8 \cdot (4 \cdot 10^{-3})^5}{(6 \cdot 10^{-2})^6 \cdot 2^5} \\
 & = \frac{3^8 \cdot 10^8 \cdot 4^5 \cdot 10^{-15}}{6^6 \cdot 10^{-12} \cdot 2^5} = \frac{3^8 \cdot 2^{10} \cdot 10^{-7}}{2^6 \cdot 2^6 \cdot 2^5 \cdot 10^{-12}} \\
 & = \frac{9 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{12}}{2} = 4,5 \cdot 10^5
 \end{aligned}$$

Question 4

27 (=7+5+5+6+4) points

Effectuer les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables autant que possible !

$$(1) \quad (2x+3)(3-2x) - x - 4(2x+5) - (x-7)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (3+2x)(3-2x) - x - 8x - 20 - (x^2 - 14x + 49) \\
 &= \underline{9 - 4x^2} - \underline{9x - 20} - \underline{x^2} + \underline{14x} - 49 \\
 &= -5x^2 + 5x - 60
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad 6 - (3x+1)(x-4)(x+5)$$

$$\begin{aligned}
 &= 6 - (3x+1)(x^2 + 5x - 4x - 20) \\
 &= 6 - (3x+1)(x^2 + x - 20) \\
 &= 6 - (3x^3 + 3x^2 - 60x + x^2 + x - 20) \\
 &= 6 - (3x^3 + 4x^2 - 59x - 20) \\
 &= 6 - 3x^3 - 4x^2 + 59x + 20 \\
 &= -3x^3 - 4x^2 + 59x + 26
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad (2a+1)\left(3a^2 + \frac{1}{2}\right)(2a-1)\left(3a^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= (2a+1)(2a-1)(3a^2 + \frac{1}{2})(3a^2 - \frac{1}{2}) \\
 &= (4a^2 - 1)(9a^4 - \frac{1}{4}) \\
 &= 36a^6 - a^2 - 9a^4 + \frac{1}{4} \\
 &= 36a^6 - 9a^4 - a^2 + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad -\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3a}{5} - 4 \right)^2 - \left(2a + \frac{1}{5} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{5}{3} \left(\frac{9a^2}{25} - \frac{24a}{5} + 16 \right) - \left(4a^2 + \frac{4a}{5} + \frac{1}{25} \right) \\
 &= -\frac{3a^2}{5} + 8a - \frac{80}{3} - 4a^2 - \frac{4a}{5} - \frac{1}{25} \\
 &= -\frac{3a^2}{5} - \frac{20a^2}{5} + \frac{40a}{5} - \frac{4a}{5} - \frac{2000}{75} - \frac{3}{75} \\
 &= -\frac{23a^2}{5} + \frac{36a}{5} - \frac{2003}{75}
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad (2a - b - 5c)(2a + b - 5c)$$

$$\begin{aligned}
 &= ((2a - 5c) - b)((2a - 5c) + b) \\
 &= (2a - 5c)^2 - b^2 \\
 &= 4a^2 - 20ac + 25c^2 - b^2
 \end{aligned}$$

Question 5

6 points

Factoriser l'expression suivante en mettant en évidence tous les facteurs communs :

$$12(3+x)(2x-5) - 16(x+3)(x-9)$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \cdot 3 \cdot (x+3)(2x-5) - 4 \cdot 4 \cdot (x+3)(x-9) \\
 &= 4(x+3) [3(2x-5) - 4(x-9)] \\
 &= 4(x+3) (6x-15-4x+36) \\
 &= 4(x+3) (2x+21)
 \end{aligned}$$