

*Durée : 105'**Calculatrice non autorisée**Je tiens compte de la propreté de la copie !*

Question 1

18 (=4+4+5+5) points

Factoriser les expressions suivantes autant que possible :

(1) $4ay + 9 - a^2 - 4y^2$

$$\begin{aligned}
 &= 9 - (a^2 - 4ay + 4y^2) \\
 &= 9 - (a - 2y)^2 \\
 &= (3 - a + 2y)(3 + a - 2y)
 \end{aligned}$$

(2) $3ax^2 - 75ay^2 - bx^2 + 25by^2$

$$\begin{aligned}
 &= (3ax^2 - 75ay^2) - (bx^2 - 25by^2) \\
 &= 3a(x^2 - 25y^2) - b(x^2 - 25y^2) \\
 &= (x^2 - 25y^2)(3a - b) \\
 &= (x - 5y)(x + 5y)(3a - b)
 \end{aligned}$$

(3) $(y^2 + y - 5)(y - 4) + 8y - y^2 - 16$

$$\begin{aligned}
 &= (y^2 + y - 5)(y - 4) - (y^2 - 8y + 16) \\
 &= (y^2 + y - 5)(y - 4) - (y - 4)^2 \\
 &= (y - 4)[(y^2 + y - 5) - (y - 4)] \\
 &= (y - 4)(y^2 + y - 5 - y + 4) \\
 &= (y - 4)(y^2 - 1) \\
 &= (y - 4)(y - 1)(y + 1)
 \end{aligned}$$

(4) $a^4 - 14y^3z - y^6 + 2a^2 - 49z^2 + 1$

$$\begin{aligned}
 &= (a^4 + 2a^2 + 1) - (y^6 + 14y^3z + 49z^2) \\
 &= (a^2 + 1)^2 - (y^3 + 7z)^2 \\
 &= [(a^2 + 1) - (y^3 + 7z)][(a^2 + 1) + (y^3 + 7z)] \\
 &= (a^2 + 1 - y^3 - 7z)(a^2 + 1 + y^3 + 7z)
 \end{aligned}$$

Question 2

9 (=3+3+3) points

Calculer astucieusement en utilisant les identités remarquables :

(1) $99,7 \cdot 100,3$

(2) $0,72^2 - 0,72 \cdot 0,44 + 0,22^2$

(3) $78,3^2 - 77,7^2$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 99,7 \cdot 100,3 &= (100 - 0,3)(100 + 0,3) \\
 &= 100^2 - 0,3^2 \\
 &= 10'000 - 0,09 \\
 &= 9'999,91
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 0,72^2 - 0,72 \cdot 0,44 + 0,22^2 \\
 &= 0,72^2 - 2 \cdot 0,72 \cdot 0,22 + 0,22^2 \\
 &= (0,72 - 0,22)^2 \\
 &= 0,5^2 = 0,25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad 78,3^2 - 77,7^2 &= (78,3 - 77,7)(78,3 + 77,7) \\
 &= 0,6 \cdot 156 \\
 &= 93,6
 \end{aligned}$$

Question 3

14 (=7+7) points

Calculer les expressions suivantes et mettre le résultat sous la forme la plus simple possible. *On ne demande pas les conditions d'existence !*

$$(1) \quad \frac{4x}{x+1} - \frac{x^3}{x-1} - \frac{1+x^3}{1-x^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4x}{x+1} - \frac{x^3}{x-1} + \frac{1+x^3}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{4x(x-1) - x^3(x+1) + 1+x^3}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{4x^2 - 4x - x^4 - x^3 + 1 + x^3}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{4x^2 - 4x + 1 - x^4}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{(2x-1)^2 - x^4}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{(2x-1-x^2)(2x-1+x^2)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{-(x^2-2x+1)(x^2+2x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{-(x-1)^2(x^2+2x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{-(x-1)(x^2+2x-1)}{x+1}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{x}{ax + a^2} - \frac{1}{a - \frac{2a^2}{x+a}}$$

$$= \frac{x}{a(x+a)} - \frac{1}{\frac{a(x+a) - 2a^2}{x+a}}$$

$$= \frac{x}{a(x+a)} - \frac{x+a}{ax + a^2 - 2a^2}$$

$$= \frac{x}{a(x+a)} - \frac{x+a}{ax - a^2}$$

$$= \frac{x}{a(x+a)} - \frac{x+a}{a(x-a)}$$

$$= \frac{x(x-a) - (x+a)^2}{a(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} - ax - \cancel{x^2} - 2ax - a^2}{a(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{-a^2 - 3ax}{a(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{\cancel{a}(-a-3x)}{\cancel{a}(x-a)(x+a)} = \frac{-a-3x}{(x-a)(x+a)}$$

Question 4

11 (=4+4+3) points

Simplifier les fractions suivantes *en indiquant les conditions d'existence* :

(1) $\frac{4x^2 - 8x + 4}{3x^5 - 3x^3}$

$$= \frac{4(x^2 - 2x + 1)}{3x^3(x^2 - 1)} \quad \text{C.E.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{array} \right.$$

$$= \frac{4(x-1)}{3x^3 \cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$= \frac{4(x-1)}{3x^3(x+1)}$$

(2) $\frac{(3a-6)(-5a-10)}{28a-7a^3}$

$$= \frac{3(a-2) \cdot (-5)(a+2)}{7a(4-a^2)} \quad \text{C.E.} \quad \left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \\ a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{array} \right.$$

$$= \frac{-15 \cancel{(a-2)} \cancel{(a+2)}}{7a \cancel{(2-a)} \cancel{(2+a)} \underset{-1}{}}$$

$$= \frac{15}{7a}$$

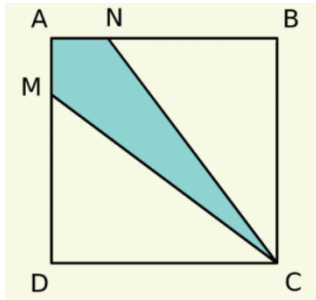
(3) $\frac{5}{65z^2y^{-8}} \cdot \frac{2}{-3z(y^2)^3}$

$$= - \frac{10z^2y^{-8}}{3z y^6} \quad \text{C.E.} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{array} \right.$$

$$= - \frac{10z}{3y^6y^8} = - \frac{10z}{3y^{14}}$$

Question 5

8 (=6+2) points



Les côtés du carré $ABCD$ ci-contre mesurent 15 cm. N et M sont deux points placés sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ tels que $AN = x + 1$ et $AM = x - 2$ (figure inexacte).

- (1) Calculer en fonction de x l'aire du quadrilatère $AMCN$.
- (2) Quelle est l'aire exacte de ce quadrilatère lorsque $x = 4,5$ cm ?

$$\begin{aligned}
 (1) \quad [AMCN] &= [ABCD] - [NBC] - [MDC] \\
 &= 15^2 - \frac{[15 - (x+1)] \cdot 15}{2} - \frac{[15 - (x-2)] \cdot 15}{2} \\
 &= 225 - \frac{225 - 15(x+1)}{2} - \frac{225 - 15(x-2)}{2} \\
 &= \frac{\cancel{450} - \cancel{225} + 15(x+1) - \cancel{225} + 15(x-2)}{2} \\
 &= \frac{15[(x+1) + (x-2)]}{2} \\
 &= \frac{15(2x-1)}{2} \quad (= 15x - 7,5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \text{Si } x &= 4,5 \text{ cm alors} \\
 [AMCN] &= \frac{15 \cdot (9-1)}{2} = \frac{15 \cdot 8}{2} \\
 &= 60 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

G. Lorang