Nom : .... Prénom : ....

5M5 — Corrigé du devoir III,2 — 4.06.2014

Question 1

Voir cours

Question 2

(1) D'après le théorème du cercle de Thalès, comme O appartient au demi-cercle de diamètre $[MN]$, le triangle MON est rectangle en O.

(2) a) D'abord il faut calculer MN en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle MON, rectangle en O :

$$\begin{aligned} &MN^2 = MO^2 + ON^2 \\ &\Leftrightarrow MN^2 = 28^2 + 45^2 \\ &\Leftrightarrow MN^2 = 2809 \\ &\Leftrightarrow MN = \sqrt{2809} = 53 \text{ m} \end{aligned}$$

On applique ensuite le théorème de la double aire pour calculer la longueur h de la hauteur issue de O :

$$h = \frac{OM \cdot ON}{MN} = \frac{28 \cdot 45}{53} = \frac{1260}{53} \text{ m}$$

b) D'après le théorème de la médiane on sait que la longueur m de la médiane issue de O est la moitié de la longueur de l'hypoténuse :

$$m = \frac{53}{2} = 26{,}5 \text{ m}$$

(3) L'aire ***exacte*** de la surface bleue est :

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{53}{2}\right)^2 - \left[MON\right] = \frac{2809\pi}{8} - \frac{28 \cdot 45}{2} = \frac{2809\pi}{8} - 630 \text{ m}^2$$

Question 3

(1) Les triangles FAB, FBC, FCD et FDA sont équilatéraux.

(2) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B :

$$\begin{aligned} &AC^2 = AB^2 + BC^2 \\ &\Leftrightarrow AC^2 = 8^2 + 8^2 = 2 \cdot 8^2 \\ &\Leftrightarrow AC = 8\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

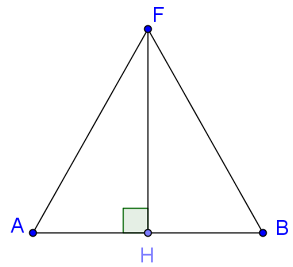
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEF, rectangle en E :

$$\begin{aligned} & AF^2 = AE^2 + EF^2 \\ & \Leftrightarrow 8^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + EF^2 \\ & \Leftrightarrow EF^2 = 64 - 32 = 32 \\ & \Leftrightarrow EF = 4\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

(3) Toutes les faces triangulaires ont même aire. Il suffit donc de calculer l'aire du triangle ABF. Soit h la hauteur du triangle ABF et H le pied de la hauteur. H est le milieu de $[AB]$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AHF, rectangle en H :

$$\begin{aligned} & AF^2 = AH^2 + HF^2 \\ & \Leftrightarrow 8^2 = 4^2 + HF^2 \\ & \Leftrightarrow HF^2 = 64 - 16 = 48 \\ & \Leftrightarrow HF = 4\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$



Donc l'aire d'une face triangulaire est :

$$[ABF] = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(4) Test :

$$\begin{aligned} & AC^2 = AF^2 + FC^2 \\ & \Leftrightarrow \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 8^2 + 8^2 \\ & \Leftrightarrow 128 = 64 + 64 \quad \text{VRAI !} \end{aligned}$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AFC est rectangle en F.

Question 4

cas n°	a	b	c	b'	c'	h	aire
(1)	$\frac{625}{24}$ m	25 m	$\frac{175}{24}$ m	24 m	$\frac{49}{24}$ m	7 m	$\frac{4375}{48}$ m^2
(2)	18 cm	$6\sqrt{5}$ m	12 cm	10 cm	8 cm	$4\sqrt{5}$ cm	$36\sqrt{5}$ cm^2

(1) Théorème de la hauteur :

$$h^2 = b' \cdot c' \Leftrightarrow 49 = 24 \cdot c' \Leftrightarrow c' = \frac{49}{24} \text{ m}$$

Donc : $a = b' + c' = 24 + \frac{49}{24} = \frac{625}{24}$ m

Théorème d'Euclide :

$$b^2 = b' \cdot a \Leftrightarrow b^2 = 625 \Leftrightarrow b = 25 \text{ m}$$

$c^2 = c' \cdot a \Leftrightarrow c^2 = \dfrac{625 \cdot 49}{24^2} \Leftrightarrow c = \dfrac{25 \cdot 7}{24} = \dfrac{175}{24}$ m

Aire :

$[ABC] = \dfrac{bc}{2} = \dfrac{25 \cdot 175}{48} = \dfrac{4375}{48}$ m^2

(2) Théorème d'Euclide :

$c^2 = c' \cdot a \Leftrightarrow 12^2 = 8 \cdot a \Leftrightarrow a = \dfrac{144}{8} = 18$ cm

$b' = a - c' = 18 - 8 = 10$ cm

Théorème de la hauteur :

$h^2 = b' \cdot c' \Leftrightarrow h^2 = 80 \Leftrightarrow h = 4\sqrt{5}$ cm

Théorème d'Euclide :

$b^2 = b' \cdot a \Leftrightarrow b^2 = 180 \Leftrightarrow b = 6\sqrt{5}$ m

Aire :

$[ABC] = \dfrac{6\sqrt{5} \cdot 12}{2} = 36\sqrt{5}$ cm^2