Corrigé de l'épreuve commune en classe de V ᵉ : le théorème de Pythagore et les racines carrées

Vendredi, le 25 février 2005

Exercice 1 : (8 p)

a) Le triangle ABC a ses sommets sur un cercle **(1 p).** [AB] est un diamètre du cercle. **(1 p)**

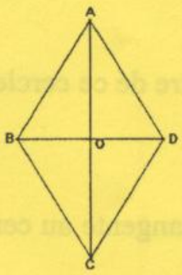
Si un triangle a ses sommets sur un cercle et si un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle. **(2 p)**

Donc ici, le triangle ABC est un triangle rectangle en C. **(1 p)** On peut appliquer le théorème de Pythagore : $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2+\overline{CB}^2$ pour déterminer $\overline{AB}$ si l'on connaît $\overline{AC}$ et $\overline{CB}$ **(1 p)**

b) Le triangle DEF est isocèle de sommet principal E. L'amplitude de l'angle au sommet $\widehat{E}$ est de 65°. Donc le triangle DEF n'est pas rectangle et par conséquent on ne peut pas appliquer le théorème de Pythagore. **(2 p)**

Exercice 2 : (12 p)

a) 1)



(2p)

a) 2)

Appliquons le triangle de Pythagore dans le triangle ABO rectangle en O : $\overline{AB}^2 = \overline{BO}^2+\overline{OA}^2$.

$\overline{OA} = \frac{7}{2}cm$, $\overline{BO} = \frac{5}{2}cm$.

Donc $\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{74}{4}} = \sqrt{\frac{37}{2}} \approx 4{,}30$ cm

(5p)

b) $\overline{IJ} = 1+2 = 3$ cm, $\overline{JK} = 2+3 = 5$ cm, $\overline{KI} = 3 + 1 = 4$ cm

Pour montrer que le triangle IJK est rectangle en I, il suffit de montrer que : $\overline{IJ}^2 + \overline{KI}^2 = \overline{JK}^2$

(Réciproque du théorème de Pythagore).

On a bien $3^2+4^2 = 9+16 = 25 = 5^2$, donc finalement le triangle IJK est rectangle en I. **(5p)**

Exercice 3 : (13 p)

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BDG, rectangle en G :

$\overline{DB}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{GB}^2$

$\overline{GB}^2 = \overline{DB}^2-\overline{DG}^2$

$\overline{GB}^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$

$\overline{GB} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ m. **(5 p)**. Donc $\overline{BF} = \overline{BG}+\overline{GB} = 3+ 3\sqrt{3}$ m **(1 p)**

Comme le triangle ABC est rectangle en A, on peut appliquer : $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$. (Dans tout triangle rectangle, le carré de la hauteur relative à l'hypoténuse est égal au produit des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse).

Donc $\overline{AH} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. **(5 p)**

D'où la hauteur finale de la maison : $\overline{FB}+\overline{AH} = 3+ 3\sqrt{3} +2\sqrt{5} \approx 12{,}67$m **(2 p)**

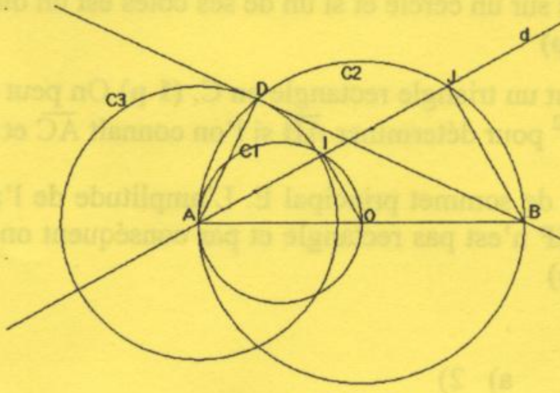
Exercice 4 : (13 p)

a) Le point I appartient au cercle de diamètre [AO]. Donc (OI) $\perp$ (AI) **(2 p)**

Le point J appartient au cercle de diamètre [AB]. Donc (BJ) $\perp$ (AJ) **(2 p)**

(OI) $\perp$ (AI) et (BJ) $\perp$ (AJ). Donc (OI) est parallèle à (BJ). **(2 p)**

b)



(2 p)

c) Le point D appartient au cercle de diamètre [AB].

Si un triangle a ses sommets sur un cercle et si un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

Donc le triangle ABD est rectangle en D.

La perpendiculaire à un diamètre d'un cercle en une de ses extrémités est tangente au cercle en ce point.

Donc (BD) est tangente à C3 en D. **(5 p)**

Exercice 5 : (14 p)

Calculez formellement:

a) $\sqrt{24}+\sqrt{1}+\sqrt{9+16}=2\sqrt{6}+1+5=6+2\sqrt{6}$ **(3 p)**

b) $6\sqrt{\frac{2}{9}}+5\sqrt{8}-3\sqrt{32}=2\sqrt{2}+10\sqrt{2}-12\sqrt{2}=0$ **(4 p)**

c) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2-(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{15}+5-(5+2\sqrt{10}+2)=1-2\sqrt{15}-2\sqrt{10}$ **(4 p)**

d) $\left(5\sqrt{6}-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(5\sqrt{6}+4\sqrt{3}\right)=25\cdot 6-16\cdot 3=150-48=102$ **(3 p)**