6B Corrigé du devoir de mathématiques I,2 12.11.02

Exercice 1

(1) Sans faire une division, montrer que 1043504 et 2002 sont divisibles par 11 :

- $1-0+4-3+5-0+4=11$ et $11 \mid 11$ donc $11 \mid 1043504$
- $2-0+0-2=0$ et $11 \mid 0$ donc $11 \mid 2002$

(2) Déterminer la factorisation première de 1043504 et de 2002 :

$$\begin{array}{r|l} 1043504 & 2 \\ 521752 & 2 \\ 260876 & 2 \\ 130438 & 2 \\ 65219 & 7 \\ 9317 & 7 \\ 1331 & 11 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2002 & 2 \\ 1001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Donc : } 1043504 = 2^4 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \\ \text{Et : } 2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \end{array}}$$

(3) 1043504 a $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ diviseurs ; 2002 en a exactement $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

(4) En utilisant les factorisations premières ci-dessus, on trouve facilement :

	2	4	8	16	14	14^2	14^3	22	49	49^2	2002
1043504	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$		$\mid$	$\mid$		
2002	$\mid$				$\mid$			$\mid$			$\mid$

(5) On peut par exemple faire un schéma en arbre. On trouve alors les 16 diviseurs :
$\mathcal{D}iv\,2002 = \{1,2,7,11,13,14,22,26,77,91,143,154,182,286,1001,2002\}$

(6) Calculer ***sous forme factorisée*** :

a) $\text{pgcd}(1043504{,}2002) = 2 \cdot 7 \cdot 11 (= 154)$.

b) $\text{pgcd}\left(1043504{,}2002^2\right) = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$.

c) $\text{pgcd}\left(1043504{,}2002^3\right) = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11^3$.

Le plus petit naturel n tel que $\text{pgcd}(1043504{,}2002^n) = 1043504$ est égal à 4 puisque 4 est l'exposant le plus grand qui intervient dans la factorisation première de 1043504. Donc, si $n \geq 4$ alors $1043504 = 2^4 \cdot 7^2 \cdot 11^3$ est un diviseur de 2002^n.

(7) Ecrire sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{1043504}{2002 \cdot 11} = \frac{2^4 \cdot 7^2 \cdot 11^3}{2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13} = \frac{2^3 \cdot 7 \cdot 11}{13} = \frac{616}{13}$$

$$\frac{1043504}{2002^2} = \frac{2^4 \cdot 7^2 \cdot 11^3}{2^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = \frac{2^2 \cdot 11}{13^2} = \frac{44}{169}$$

(8) $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ et $15 = 3 \cdot 5$. Donc : $\text{pgcd}(2002{,}15) = 1$, c.-à-d. 2002 et 15 sont premiers entre eux.

Exercice 2

(1) • $\text{pgcd}(a, \text{pgcd}(b,c)) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a,b),c) = \text{pgcd}(a,b,c)$.

• Si un nombre naturel est divisible par deux nombres naturels premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit.

(2) a) $1234 = 43 \cdot 28 + 30,\ 0 \le 30 < 43$

b) Div. eucl. de 1235 par 43 : $1235 = 43 \cdot 28 + 31,\ 0 \le 31 < 43$.

c) Div. eucl. de 1244 par 43 : $1244 = 43 \cdot 28 + 40,\ 0 \le 40 < 43$.

d) Div. eucl. de 1224 par 43 : $1224 = 43 \cdot 28 + 20,\ 0 \le 20 < 43$.

e) Div. eucl. de 1234 par 28 : $1224 = 28 \cdot 44 + 2,\ 0 \le 2 < 28$.

f) De combien peut-on augmenter le dividende dans la division euclidienne a) sans changer le quotient ? Rép. : 12. Quel est le plus petit entier qu'on doit retrancher au dividende dans la division euclidienne a) pour que le quotient diminue de 1 ? Rép. : 31.