

*Durée : 60'**Calculatrice non autorisée*

Question 1

20 (=3+3+6+8) points

(1) Énoncer les *formules* suivantes :

a) Puissance d'une puissance : $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

b) Puissance d'un produit : $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

c) Produit de puissances de même base : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) a) Que peut-on dire du *signe* de a^n lorsque $a < 0$?Si n est pair (et $a < 0$) alors $a^n > 0$ Si n est impair (et $a < 0$) alors $a^n < 0$ b) Donner le *signe* (+ ou -) des nombres suivants *sans les calculer* !

• $6^3 \cdot (-4)^6$ +

• $-(-4^5)^4$ -

• $(-5^8) \cdot (-2)^{14}$ -

• $\frac{-12^6}{(-7)^7}$ +

• $38^{12} - 38^{11}$ +

• $(-5)^6 - (-5)^7$ +

• $\left(-2 \cdot (-5)^{2013}\right)^{2013}$ +

(3) Écrire en extension les ensembles de nombres suivants :

$A = \{2^n / n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq n \leq 8\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$

$B = \{-3^{2n} / n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq n \leq 3\} = \{-1, -9, -81, -729\}$

$C = \{(2n-5)^n / n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq n \leq 4\} = \{1, -3, 81\}$

Question 2

12 points

Mettre sous forme d'une puissance a^n ou $-a^n$:

(1) $\frac{4^7 \cdot (-2)^5}{8^3}$

$$= \frac{(2^2)^7 \cdot (-2)^5}{(2^3)^3} = \frac{-2^{14} \cdot 2^5}{2^9}$$

$$= -\frac{2^{19}}{2^9} = -2^{10}$$

(2) $(-3)^{10} \cdot 25^5$

$$= 3^{10} \cdot (5^2)^5$$

$$= 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$= 15^{10}$$

(3) $100^6 \cdot (-1000^5)^2$

$$= (10^2)^6 \cdot ((10^3)^5)^2$$

$$= 10^{12} \cdot (10^{15})^2$$

$$= 10^{12} \cdot 10^{30} = 10^{42}$$

(4) $\frac{42^3 \cdot (-7^{10})}{6^3}$

$$= -\frac{\cancel{6^3} \cdot 7^3 \cdot 7^{10}}{\cancel{6^3}}$$

$$= -7^{13}$$

Question 3

12 (=4+8) points

Calculer :

$$(1) \quad 3^2 \cdot \left(5^2 - (-2)^3 + (-2)^5 \right)^2 - \left(10 + (-2)^1 \cdot 6 \right) \cdot 2^3 - (7^0)^4$$

$$\begin{aligned}
 &= 9 \cdot (25 - (-8) + (-32))^2 - (10 - 2 \cdot 6) \cdot 8 - 1^4 \\
 &= 9 \cdot (25 + 8 - 32)^2 - (10 - 12) \cdot 8 - 1 \\
 &= 9 \cdot 1^2 - (-2) \cdot 8 - 1 \\
 &= 9 + 16 - 1 = 24
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{2^3 \left(\frac{3}{2} - \frac{14}{21} \right)^2 + \left(\frac{15}{27} \right)^2 (-3)^2}{\left(-2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \right)^2}$$

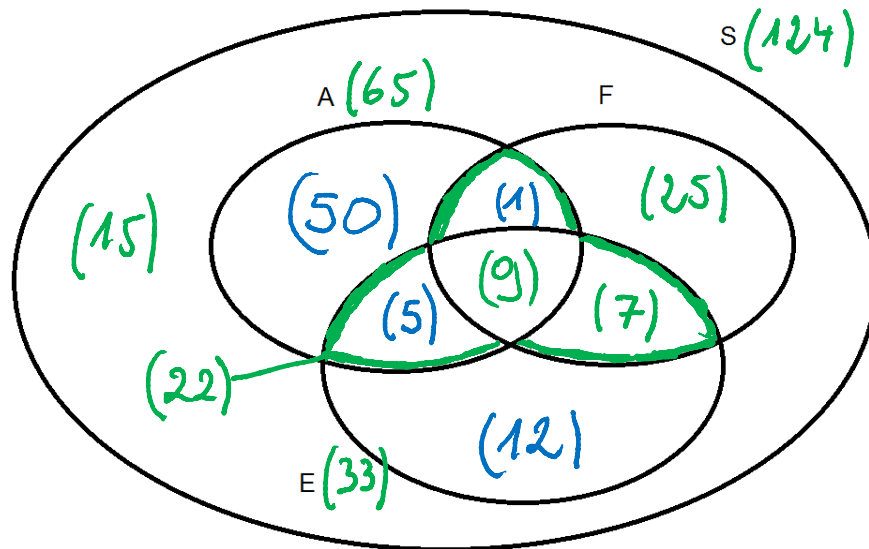
$$\begin{aligned}
 &= \frac{8 \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{5}{9} \right)^2 \cdot 9}{\left(-2 + \frac{1}{3} \right)^2} \\
 &= \frac{8 \cdot \left(\frac{9}{6} - \frac{4}{6} \right)^2 + \frac{25}{81} \cdot 9}{\left(-2 + \frac{1}{3} \right)^2} \\
 &= \frac{8 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^2 + \frac{25}{9}}{\left(-\frac{6}{3} + \frac{1}{3} \right)^2} \\
 &= \frac{8 \cdot \frac{25}{36} + \frac{25}{9}}{\left(-\frac{5}{3} \right)^2} \\
 &= \frac{\frac{50}{9} + \frac{25}{9}}{\frac{25}{9}} \\
 &= \frac{\frac{75}{9}}{\frac{25}{9}} \\
 &= \frac{3}{1} \cdot \frac{9}{25} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Question 4

16 (=4+4+4+4) points

Les 124 élèves d'un lycée inscrits en classe de 3e (ensemble S) peuvent choisir d'étudier l'anglais (sous-ensemble A), le français (sous-ensemble F) ou l'espagnol (sous-ensemble E). On sait que : 25 n'étudient que le français ; 65 étudient l'anglais ; 33 étudient l'espagnol ; 15 n'étudient aucune langue ; 9 étudient les trois langues ; 22 étudient au moins deux langues ; 7 n'étudient que le français et l'espagnol.

- (1) Ecrire toutes ces informations **en vert** sur le diagramme de Venn ci-dessous, mais ne commencez pas encore à calculer !



- (2) Déterminer dans cet ordre :

a) l'ensemble et le nombre d'élèves qui étudient au moins une langue :

$$|A \cup F \cup E| = 124 - 15 = 109$$

b) l'ensemble et le nombre d'élèves qui n'étudient que l'espagnol :

$$|E \setminus (A \cup F)| = 109 - 65 - 25 - 7 = 12$$

c) l'ensemble et le nombre d'élèves qui n'étudient que l'espagnol et l'anglais :

$$|(E \cap A) \setminus F| = 33 - 9 - 7 - 12 = 5$$

- (3) Compléter **en bleu** le diagramme de Venn par les cardinaux des parties restantes.

- (4) A l'aide du diagramme de Venn, déterminer :

a) le nombre d'élèves qui étudient le français : **42**

b) le nombre d'élèves qui étudient l'anglais ou l'espagnol : **84**

c) le nombre d'élèves qui étudient l'anglais et l'espagnol : **14**

d) le nombre d'élèves qui étudient exactement une langue : **87**