6M8 — Corrigé du devoir II,1 — 6.02.09

Question 2

(1) $A = \{1000, 500, 250, 200, 125, 100\}$;

(2) $132 = 6 \cdot 2 \cdot 11$, donc $B = \{6, 12, 66, 132\}$.

Question 3

(1) 391 n'est pas divisible par 2, par 3, par 5.

$391 = 7 \cdot 55 + 6$, donc $7 \nmid 391$

$3 - 9 + 1 = -5$, donc $11 \nmid 391$

$391 = 13 \cdot 30 + 1$, donc $13 \nmid 391$

Mais : $391 = 17 \cdot 23$, donc 391 n'est pas premier.

(2) $\operatorname{Div} 391 = \{1, 17, 23, 391\}$

Question 4

(1) $4655 = 5 \cdot 931 = 5 \cdot 7 \cdot 133 = 5 \cdot 7^2 \cdot 19$.

Donc 4655 a $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ diviseurs.

$4655^2 = \left(5 \cdot 7^2 \cdot 19\right)^2 = 5^2 \cdot 7^4 \cdot 19^2$.

Donc : 4655^2 a $3 \cdot 5 \cdot 3 = 45$ diviseurs.

(2) C'est $4655 : 5 = 931$.

(3) C'est $5 \cdot 19 = 95$.

(4) $(50 - 1) \cdot (20 - 1) = 49 \cdot 19 = 7^2 \cdot 19$, donc c'est un diviseur de 4655.

Question 5

a) d est un diviseur commun de 168, 144 et 816, donc c'est un diviseur de leur pgcd. Or,

$$\begin{aligned} \operatorname{pgcd}(168, 144, 816) &= 8 \operatorname{pgcd}(21, 18, 102) \\ &= 24 \cdot \operatorname{pgcd}(3, 6, 34) \\ &= 24 \cdot \operatorname{pgcd}(3, 34) \\ &= 24 \end{aligned}$$

Donc d est un diviseur de 24, compris entre 7 et 10. Il y une seule possibilité : $d = 8$ m.

b) Nombre de piquets sur $[AB]$ et $[CD]$:

$$2 \cdot \left(\frac{168 + 144}{8} + 1\right) = 2 \cdot (21 + 18 + 1) = 80$$

Nombre de piquets sur $[AD]$, $[EF]$ et $[BC]$:

$$3 \cdot \left(\frac{816}{8} - 1\right) = 3 \cdot (102 - 1) = 303$$

Nombre total de piquets : $303 + 80 = 383$.

Question 6

On sait que :

$$\begin{aligned} 11 \mid a2345b &\Leftrightarrow 11 \mid a - 2 + 3 - 4 + 5 - b \\ &\Leftrightarrow 11 \mid a - b + 2 \quad \text{(C1)} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} 3 \mid a2345b &\Leftrightarrow 3 \mid a + 2 + 3 + 4 + 5 + b \\ &\Leftrightarrow 3 \mid a + b + 14 \quad \text{(C2)} \end{aligned}$$

La condition C1 est remplie si et seulement si $a-b+2=0$ ou $a-b+2=11$. Or $a-b+2$ ne peut être égal à 11 que si $a=9$ et $b=0$. Mais cette solution ne convient pas puisqu'alors la condition C2 n'est pas remplie ($9+14=23$ n'est pas divisible par 3).

On a donc nécessairement $a-b+2=0 \Leftrightarrow a=b-2$.

La condition C2 devient alors :

$$
\begin{aligned}
& 3 \mid b-2+b+14 \\
\Leftrightarrow\ & 3 \mid 2b+12 \\
\Leftrightarrow\ & 3 \mid 2b \quad \text{car } 3 \mid 12 \\
\Leftrightarrow\ & 3 \mid b
\end{aligned}
$$

Donc $b=3$ et $a=1$ ou $b=6$ et $a=4$ ou $b=9$ et $a=7$.

Les nombres cherchés sont donc :

$$123453\,,\ 423456 \ \text{ et } \ 723459\,.$$

G. Lorang