Nom : .... Prénom : ....

6M8 — Corrigé du devoir II,1 — 24.01.2013

Durée : 60′ ***Calculatrice non autorisée***

Question 1

12 (=6+6) points

(1) Déterminer le nombre de diviseurs de a) 3087 et b) 3087^3 ?

3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	

Donc $3087 = 3^2 \cdot 7^3$

a) $\# \text{Div } 3087 = 3 \cdot 4 = 12$

b) $3087^3 = (3^2 \cdot 7^3)^3 = 3^6 \cdot 7^9$

Donc $\# \text{Div } 3087^3 = 7 \cdot 10 = 70$

(2) Déterminer tous les diviseurs de 3087 à l'aide d'un schéma en arbre.

	Div 3^2	Div 7^3	Div 3087
1	1	1	1
		7	7
		49	49
		343	343
	3	1	3
		7	21
		49	147
		343	1029
	9	1	9
		7	63
		49	441
		343	3087

Donc Div 3087 = {1, 3, 7, 9, 21, 49, 63, 147, 343, 441, 1029, 3087}

Question 2 20 points

(1) Compléter après avoir justifié les calculs ci-dessous :

a) $\mathrm{pgcd}(216,168) = \dots 24 \dots$

b) $\mathrm{ppcm}(4,6,8,12) = \dots 24 \dots$

c) $\mathrm{Div}\,52 \cap \mathrm{Div}\,26 = \dots \mathrm{Div}\,26 \dots$

d) $\mathrm{pgcd}(294,315) = \dots 21 \dots$

e) $\mathrm{ppcm}(180,240) = 720 \dots$

f) $25\mathbb{N} \cap 30\mathbb{N} \cap 50\mathbb{N} = \dots 150\,\mathbb{N}$

g) $\mathrm{pgcd}(39,40,41,42) = \dots 1 \dots$

h) $\mathrm{Div}\,200 \cap \mathrm{Div}\,160 = \dots \mathrm{Div}\,40$

i) $\mathrm{pgcd}(36^4, 54^2) = \dots 2^2 \cdot 3^6 \dots$

j) $\mathrm{ppcm}(6^5, 9^3) = \dots 2^5 \cdot 3^6 \dots$

a) $\mathrm{pgcd}(216,168)$
$= 4 \cdot \mathrm{pgcd}(54,42)$
$= 4 \cdot 6\, \mathrm{pgcd}(9,7)$
$= 24$

b) $\mathrm{ppcm}(4,6,8,12)$
$= \mathrm{ppcm}(8,12)$
$= 4 \cdot \mathrm{ppcm}(2,3)$
$= 4 \cdot 2 \cdot 3$
$= 24$

c) $\mathrm{pgcd}(52,26)$
$= 26$ car $26 \mid 52$

d) $\mathrm{pgcd}(294,315)$
$= 3\, \mathrm{pgcd}(98,105)$
$= 3 \cdot 7 \cdot \mathrm{pgcd}(14,15)$
$= 21$

e) $\mathrm{ppcm}(180,240)$
$= 10 \cdot \mathrm{ppcm}(18,24)$
$= 10 \cdot 3 \cdot \mathrm{ppcm}(6,8)$
$= 10 \cdot 3 \cdot 24$
$= 30 \cdot 24$
$= 720$

f) $\mathrm{ppcm}(25,30,50)$
$= 5\, \mathrm{ppcm}(5,6,10)$
$= 5 \cdot \mathrm{ppcm}(30,10)$
$= 5 \cdot 10 \cdot \mathrm{ppcm}(3,1)$
$= 5 \cdot 10 \cdot 3 = 150$

g) $\mathrm{pgcd}(39,40,41,42)$
$= 1$ car 41 est premier et les autres entiers ne sont pas des multiple de 41

h) $\mathrm{pgcd}(200,160)$
$= 40 \cdot \mathrm{pgcd}(5,4)$
$= 40$

i) $36^4 = (2^2 \cdot 3^2)^4 = 2^8 \cdot 3^8$
$54^2 = (2 \cdot 3^3)^2 = 2^2 \cdot 3^6$

j) $6^5 = (2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$
$9^3 = (3^2)^3 = 3^6$

Question 3 12 (=6+6) points

(1) Quel est le plus petit dénominateur commun des fractions : $\frac{1}{48}$, $\frac{-3}{56}$ et $\frac{5}{84}$?

Calculer ensuite la somme des trois fractions.

C'est le ppcm(48, 56, 84)

$= 4 \cdot \text{ppcm}(12, 14, 21)$

$= 4 \cdot \text{ppcm}(12, 42)$

$= 4 \cdot 6 \cdot \text{ppcm}(2, 7)$

$= 4 \cdot 6 \cdot 14 = 24 \cdot 14 = \underline{336}$

Donc : $\frac{1}{48} + \frac{-3}{56} + \frac{5}{84}$

$= \frac{7}{336} - \frac{18}{336} + \frac{20}{336} = \frac{9}{336} = \boxed{\frac{3}{112}}$

(2) Par quel nombre entier faut-il simplifier la fraction $\frac{6'468}{7'644}$ pour la rendre irréductible et quelle est cette fraction irréductible ?

Il faut simplifier cette fraction par

pgcd(6468, 7644)

$= 4 \cdot \text{pgcd}(1617, 1911)$

$= 4 \cdot 3 \cdot \text{pgcd}(539, 637)$

$= 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \text{pgcd}(77, 91)$

$= 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \text{pgcd}(11, 13)$

$= 12 \cdot 49 \cdot 1$

$= 588$

$12 \cdot 49$

$= 12 \cdot (50 - 1)$

$= 12 \cdot 50 - 12$

$= 600 - 12$

$= \underline{588}$

Donc $\frac{6468}{7644} \overset{:588}{=} \frac{11}{13}$

Question 4

10 (=5+5) points

(1) Quel est le multiple commun de 90 et de 135 le plus proche de 2'000 ?

Les multiples communs de 90 et de 135 sont les multiples de leur ppcm, donc de 270.

$$\mathrm{ppcm}(90,135) = 9\cdot \mathrm{ppcm}(10,15) = 9\cdot 5\cdot \mathrm{ppcm}(2,3) = 9\cdot 5\cdot 6 = 270$$

Or, $7\cdot 270 = 1890$ et $8\cdot 270 = 2160$

Le multiple commun le plus proche de 2000 est donc $\boxed{1890}$ (car $2000-1890 = 110$ et $2160-2000 = 160$)

(2) Quel est le diviseur commun de 1'512 et de 1'080 le plus proche de 25 ?

Les diviseurs communs de 1512 et de 1080 sont les diviseurs de leur pgcd, donc de 216

$$\mathrm{pgcd}(1512,1080) = 4\cdot \mathrm{pgcd}(378,270) = 4\cdot 9\cdot \mathrm{pgcd}(42,30) = 4\cdot 9\cdot 6\cdot \mathrm{pgcd}(7,5) = 36\cdot 6 = 216$$

Le diviseur de 216 le plus proche de 25 est $\boxed{24}$. ($26 \nmid 216$)

Question 5

6 points

Parmi les entiers 2009, 2013, 2015, 2017 et 2019 il y en a ***un seul*** qui est premier : détecter-le de façon aussi rapide que possible en justifiant la réponse !

$7 \mid 2009$ car $2009 = 7\cdot 287$

$3 \mid 2013$ et $3 \mid 2019$ (somme des chiffres)

$5 \mid 2015$

Donc 2009, 2013, 2019 et 2015 ne sont pas premiers ! Il ne reste plus que 2017 qui doit donc être premier !

G. Lorang