

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 1998

Section: C & D

Jui

Branche: Mathématiques II

Nom et prénom du candidat

1. 1) Démontrer:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

2) Démontrer:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

3) Soit la fonction $f : x \mapsto e^x$.
Démontrer: $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x$.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(1 + 2\ln x)^2}{x}$.

1) Etudier f : domaine de définition, limites et asymptotes, dérivée, extrema, tableau de variation, représentation graphique dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

2) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des x , la courbe C_f et les droites d'équations $x = e^{-\frac{1}{2}}$ et $x = e^{\frac{1}{2}}$.

3. Soit la fonction $f : x \mapsto x - \frac{2e^x}{e^x - 1}$.

1) Etudier f : domaine de définition, limites et asymptotes, position de la courbe C_f par rapport à son asymptote oblique en $+\infty$, dérivée et tableau de variation, représentation graphique dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

2) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe C_f , son asymptote oblique en $+\infty$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ où λ est un réel supérieur à 1.

Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

4. 1) Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $e^{2x+1} - 23e^{x+1} \leq 50e$

b) $\ln\sqrt{x^2 - 2x} - \ln 2x = \ln|2 - x|$

2) Soient les intégrales

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos^2 x \, dx$$

et

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin^2 x \, dx$$

Calculer $A + B$ et $A - B$ et en déduire A et B .

3) Soit la fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$.

Calculer la dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$, puis étudier la dérivabilité de f au point 0.

Répartition des points: 12 + 14 + 16 + 18 = 60