Examen de fin d'études secondaires 2004 — Corrigé — Section C Mathématiques I

I 1) a) Soit $z = x + iy$.

$$z^2 = 3-4i \iff \begin{cases}(x+iy)^2 = 3-4i \\ \text{et} \\ |z|^2 = |3-4i|\end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2+y^2 = 5\end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2\end{cases}$$

$$\iff \boxed{z = 2-i \quad \text{ou} \quad z = -2+i}$$

b) $P(z) = z^3 - 4i\, z^2 + (i-6)\, z + (3i+1)$

	1	$-4i$	$i-6$	$3i+1$
i		i	3	$-3i-1$
	1	$-3i$	$i-3$	0

donc i est une racine de $P(z)$ et

$$P(z) = (z-i)\cdot(z^2 - 3iz + i - 3).$$

$$\Delta = -9 - 4\cdot(i-3) = 3-4i$$

$$z_1 = \frac{3i+2-i}{2} = 1+i$$

$$z_2 = \frac{3i-2+i}{2} = -1+2i$$

Ainsi : $\boxed{P(z) = 0 \iff z = i \text{ ou } z = 1+i \text{ ou } z = -1+2i}$.

Et : $\boxed{P(z) = (z-i)\cdot(z-1-i)\cdot(z+1-2i)}$

2) $z_1 = \sqrt{3} - i \qquad z_2 = 2\cdot \text{cis}\,\frac{\pi}{10}$

Écrivons z_1 sous forme trigonométrique :

$|z_1| = 2$ et $z_1 = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\cdot\text{cis}\,\frac{-\pi}{6}$

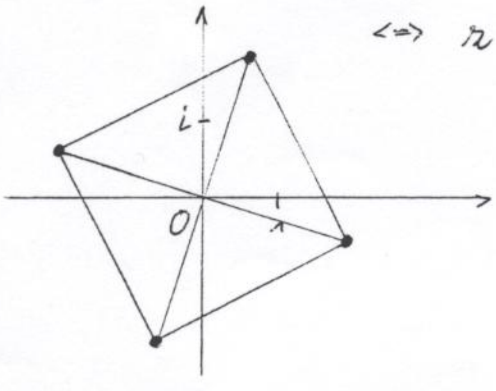
Ainsi : $(z_1)^3 \cdot z_2 = \left(2\,\text{cis}\,\frac{-\pi}{6}\right)^3 \cdot 2\cdot\text{cis}\,\frac{\pi}{10} = 16\,\text{cis}\,\frac{-4\pi}{10}$.

Soit $z = r\cdot\text{cis}\,\varphi$.

$$z^4 = (z_1)^3\cdot z_2 \iff r^4\cdot\text{cis}\,4\varphi = 16\,\text{cis}\,\frac{-4\pi}{10}$$

$$\iff \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{-\pi}{10} + k\cdot\frac{\pi}{2} \qquad (k = 0; 1; 2; 3)\end{cases}$$

$$\iff z = 2\,\text{cis}\,\frac{-\pi}{10} \text{ ou } z = 2\,\text{cis}\,\frac{4\pi}{10} \text{ ou } z = 2\,\text{cis}\,\frac{9\pi}{10}$$
$$\text{ou } z = 2\,\text{cis}\,\frac{14\pi}{10}$$



II 1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -4+6+2-4+4-3 = 1$

$\det A \neq 0$ donc A^{-1} existe

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\begin{pmatrix} +0 & -(-1) & +(-2) \\ -1 & +(-2) & -(-5) \\ +2 & -(-3) & +(-7) \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -7 \end{pmatrix}}$$

b) le système est équivalent à :

$A \cdot X = D$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot D$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{S = \{(3;-1;2)\}}$

c) $\det M = \left(\frac{-2}{3}\right)^3 \cdot \det A = \frac{-8}{27}$

---

2) $\begin{cases} 2x + ay - 2az = 6 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$ $(*)$ $\quad L_2 \,/\, 2L_2 - L_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + ay - 2az = 6 \\ (2-a)y - 2(2-a)z = 0 \end{cases}$

1er cas : $a = 2$

$\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x + y - 2z = 3$

Posons : $y = \beta$ et $z = \gamma$

$\begin{cases} x = -\beta + 2\gamma + 3 \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$

$S = \{(-\beta+2\gamma+3\,;\,\beta\,;\,\gamma) \mid \beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$

Int. géom. : Si $a = 2$, $(*)$ est un système de 2 équations de deux plans de l'espace qui sont confondus.

2e cas : $a \neq 2$

$\begin{cases} 2x + ay - 2az = 6 \\ y = 2z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2z \end{cases}$

Posons : $z = \gamma$ $\quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2\gamma \\ z = \gamma \end{cases}$

$S = \{(3\,;\,2\gamma\,;\,\gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$

Int. géom. : Si $a \neq 2$, $(*)$ est un système de deux éq. de deux plans de l'espace dont l'intersection est la droite passant par $A(3;0;0)$ et de vect. dir. $\vec{u}(0;2;1)$

III 1) 6 boules blanches
4 boules vertes

$$\# \Omega = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = A_{10}^{5}$$

a) $P(\text{au moins une verte}) = 1 - P(\text{aucune verte})$

$$= 1 - \frac{A_6^5}{A_{10}^5} = 1 - \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6} = \frac{41}{42}$$

b) $$P(\text{1 blanche suivie de 4 vertes}) = \frac{6\cdot A_4^4}{A_{10}^5} = \frac{6\cdot(4\cdot3\cdot2\cdot1)}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6} = \frac{1}{210}$$

c) $$P(\text{une seule blanche}) = \frac{5\cdot6\cdot A_4^4}{A_{10}^5} = \frac{1}{42}$$

d) $$P(\text{3 blanches suivies de 2 vertes}) = \frac{A_6^3\cdot A_4^2}{A_{10}^5} = \frac{(6\cdot5\cdot4)\cdot(4\cdot3)}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6} = \frac{1}{21}$$

e) $$P(\text{exactement 3 blanches}) = \frac{C_5^3\cdot A_6^3\cdot A_4^2}{A_{10}^5} = \frac{10\cdot A_6^3\cdot A_4^2}{A_{10}^5} = \frac{10}{21}$$

$$\left(\text{autre calcul : } P(\text{exact. 3 blanches}) = \frac{C_6^3\cdot C_4^2}{C_{10}^5} = \frac{20\cdot6}{9\cdot7\cdot4} = \frac{10}{21}\right)$$

---

2) 7 garçons dont 2 ont un permis de conduire
11 filles dont 4 " " "

a) $P(C) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$P(G) = \frac{7}{18}$

$P(C\cap G) = \frac{2}{18} \neq P(C)\cdot P(G)$

donc C et G ne sont pas indépendants.

b) $P(C\cap F) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

$$P(F|C) = \frac{P(C\cap F)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$