CORRIGE Math II Section C|D

I) 1) voir livre p.85

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin x + \frac{1}{\cos x}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 x + 2\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2} - 2\cdot\frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$

$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - 2\ln|\cos x| + \tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} - 2\ln|\cos\frac{\pi}{4}| + \tan\frac{\pi}{4} - (0 - \frac{1}{4}\cancel{\sin 0} - 2\cancel{\ln|\cos 0|} + \cancel{\tan 0})$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} - 2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\pi}{8} + \frac{3}{4} + \ln 2$

II 1) $(\log_{\sqrt{2}} x)^2 + 2\log_2 x = 2$

CE : $x > 0$
$D = \mathbb{R}_0^+$

$\left(\frac{\ln x}{\ln\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{2\ln x}{\ln 2} = 2$

$\left(\frac{2\ln x}{\ln 2}\right)^2 + \frac{2\ln x}{\ln 2} = 2$

Posons $y = \frac{2\ln x}{\ln 2}$

$y^2 + y - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$y = \frac{-1+3}{2} = 1$ ou $y = \frac{-1-3}{2} = -2$

$\frac{2\ln x}{\ln 2} = 1$ ou $\frac{2\ln x}{\ln 2} = -2$

$\ln x = \frac{1}{2}\ln 2$ ou $\ln x = -\ln 2$

$\ln x = \ln\sqrt{2}$ ou $\ln x = \ln\frac{1}{2}$

$x = \sqrt{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{\sqrt{2} ; \frac{1}{2}\right\}$

2) $\frac{\ln x - 1}{\ln x - 2} < 3 \quad (*)$

CE: 1) $x > 0$
2) $\ln x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq e^2$

$D = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{e^2\}$

$(*) \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{\ln x - 2} - 3 < 0$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x - 1 - 3\ln x + 6}{\ln x - 2} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{-2\ln x + 5}{\ln x - 2} < 0$

Signe de $-2\ln x + 5$:

$-2\ln x + 5 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{2}}$

$-2\ln x + 5 > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{5}{2}}$

$-2\ln x + 5 < 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{5}{2}}$

Signe de $\ln x - 2$:

$\ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = e^2$

$\ln x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > e^2$

$\ln x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < e^2$

x	0		e^2		$e^{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
$-2\ln x + 5$		+		+	0	−	
$\ln x - 2$		−	0	+		+	
$\frac{-2\ln x + 5}{\ln x - 2}$		−	‖	+	0	−	

$S =]0 ; e^2[\cup]e^{\frac{5}{2}} ; +\infty[$

3) $\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ ($x \to +\infty$, $\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} \to 0$) f.i.

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ $\begin{matrix}\to 0 \\ \to 0\end{matrix}$ fi

$\overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$

III. $f : x \longmapsto \dfrac{x+\ln(x-1)}{x-1}$

1) $\mathrm{Dom}\, f =]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+\ln(x-1) \to -\infty}{x-1 \to 0^+} = -\infty \qquad \text{A.V. } x=1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\ln(x-1) \to +\infty}{x-1 \to +\infty} \quad \text{f.i.}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x-1}}{1} = \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x-1} = 1 \qquad \text{AH. } y=1$$

2) $\forall x \in]1,+\infty[\quad f'(x) = \dfrac{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\cdot(x-1) - (x+\ln(x-1))}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1+1-x-\ln(x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$

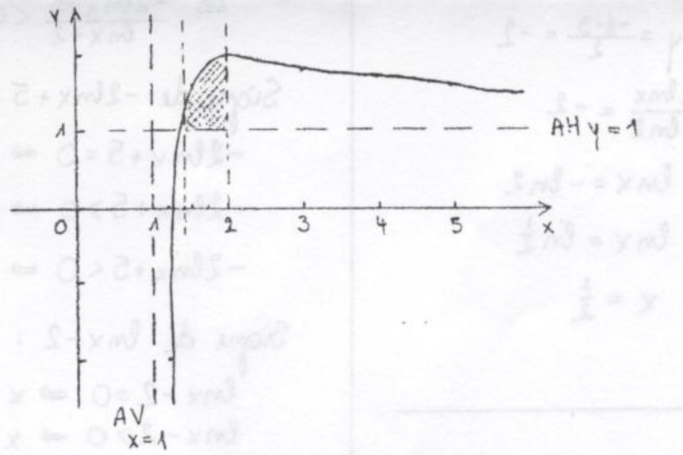
$f'(x)>0 \Leftrightarrow -\ln(x-1)>0 \Leftrightarrow \ln(x-1)<0 \Leftrightarrow x-1<1 \Leftrightarrow x<2$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x>2$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2 max	↘	1 AH $y=1$
	AV $x=1$				

3)

x	1,2	1,5	1,7	2	3	4	5
$f(x)$	−2,0	1,6	1,9	2	1,8	1,7	1,6



4) $A = \displaystyle\int_{1+\frac{1}{e}}^{2} \left(\frac{x+\ln(x-1)}{x-1} - 1\right) dx = \int_{1+\frac{1}{e}}^{2} \left(\cancel{\frac{x-1}{x-1}} + \frac{1}{x-1} + \frac{\ln(x-1)}{x-1} \cancel{-1}\right) dx$

$\displaystyle = \int_{1+\frac{1}{e}}^{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\ln(x-1)\right) dx = \left[\ln|x-1| + \frac{\ln^2(x-1)}{2}\right]_{1+\frac{1}{e}}^{2}$

$\displaystyle = \ln 1 + \frac{\ln^2 1}{2} - \left(\ln\frac{1}{e} + \frac{\ln^2\frac{1}{e}}{2}\right) = \ln e - \frac{\ln^2 e}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ unités d'aire

IV. $f : x \mapsto x^2 e^{1-x}$

1) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{0^+}$ f.i.

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 \to +\infty}{e^{x-1} \to +\infty} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^{x-1}} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^{x-1}} = 0^+$ AH à droite : $y=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{+\infty} = +\infty$ pas d'AH à gauche

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{-\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{+\infty} = -\infty$ pas d'A.O à gauche

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2x e^{1-x} - x^2 e^{1-x} = x e^{1-x}(2-x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

signe de f' = signe de $x\cdot(2-x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$ max	$\searrow$	0 AH $y=0$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = (2x e^{1-x} - x^2 e^{1-x})' = 2e^{1-x} - 2x e^{1-x} - 2x e^{1-x} + x^2 e^{1-x} = e^{1-x}(x^2 - 4x + 2)$

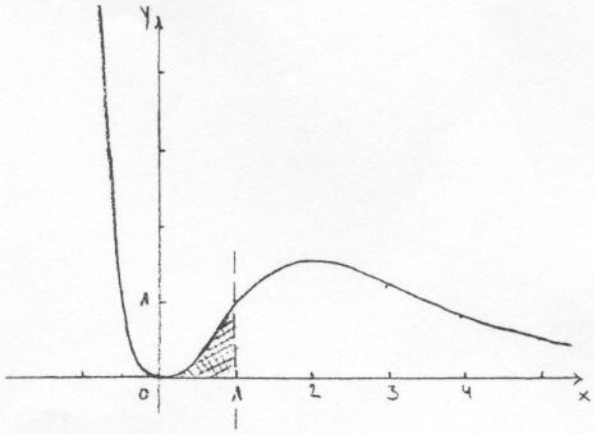
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Delta = 16 - 8 = 8$ $\quad x = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$ ou $x = 2-\sqrt{2}$

Abscisses des points d'inflexion : $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$

4)

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	7,4	0	1	1,5	1,2	0,8	0,5



5) $A = \int_0^1 x^2 e^{1-x}\, dx$

posons $u(x) = x^2$; $u'(x) = 2x$
et $v'(x) = e^{1-x}$; $v(x) = -e^{1-x}$

$= \left[-x^2 e^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2x e^{1-x}\, dx$

posons $u_1(x) = 2x$; $u_1'(x) = 2$
et $v_1'(x) = e^{1-x}$; $v_1(x) = -e^{1-x}$

$= \left[-x^2 e^{1-x}\right]_0^1 + \left[-2x e^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2e^{1-x}\, dx$

$= \left[-x^2 e^{1-x} - 2x e^{1-x} - 2e^{1-x}\right]_0^1$

$= -e^0 - 2e^0 - 2e^0 - (0 - 0 - 2e)$

$= -5 + 2e \simeq 0{,}4$ unités d'aire