Corrigé modèle

1. $z^2 + (2+5i)z - 21 + i = 0$

$\Delta = (2+5i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-21+i)$

$= 4 + 20i - 25 + 84 - 4i$

1 $= 16i + 63$

Racines de Δ : Soit $x+iy$ une racine carrée de $63+16i$

Alors $(x+iy)^2 = 63 + 16i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 63 & (1) \\ 2xy = 16 & (2) \quad x \text{ et } y \text{ ont } \hat{m} \text{ signe !} \\ x^2 + y^2 = 65 & (3) \quad \text{car module de } 63+16i = \sqrt{63^2+16^2} \end{cases}$$

$= \sqrt{4225}$

$= 65$

$(1)+(2)$: $2x^2 = 128$

$x^2 = 64$

8 $x = \pm 8$

$(1)-(2)$: $2y^2 = 2$

3 $y = \pm 1$

Les racines carrées de Δ sont : $8+i$ et $-8-i$

D'où : $z = \dfrac{-2-5i+8+i}{2}$ ou $z = \dfrac{-2-5i-8-i}{2}$

$= \dfrac{6-4i}{2}$ $\qquad = \dfrac{-10-6i}{2}$

2 $= 3-2i$ $\qquad = -5-3i$

Donc : $S = \{3-2i\,;\, -5-3i\}$

2. $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6}{(3+3i)^5} = \; ?$

$= \dfrac{\left(\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^6}{\left(3\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}\right)^5}$

2 $= \dfrac{\text{cis}\,4\pi}{3^5\cdot 4\sqrt{2}\cdot\text{cis}\,\frac{5\pi}{4}}$

$= \dfrac{1}{243\cdot 4\sqrt{2}}\cdot\text{cis}\left(0-\frac{5\pi}{4}\right)$

$= \dfrac{1}{972\sqrt{2}}\cdot\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

6 $= \dfrac{1}{972\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= -\dfrac{1}{1944}+\dfrac{1}{1944}\cdot i$

• Forme trigonométrique de $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

module : $r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

2 $= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$

$= 1$

argument : $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = -\frac{1}{2}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}$ φ est dans le II^e quad. $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ rad

D'où $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$

• F. t. de $3+3i$:

module : $r = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

2 argument : $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ rad.

D'où : $3+3i = 3\sqrt{2}\cdot\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

3. Soit $r\cdot\text{cis}\varphi$ une racine sixième de $64i$:

Alors $(r\cdot\text{cis}\varphi)^6 = 64\cdot\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$

$\begin{cases} r^6 = 64 \\ 6\varphi = \frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

2

$\begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\end{cases}$

6 Les racines sixièmes sont :

$k=0$: $z_0 = 2\cdot\text{cis}\,\frac{\pi}{12}$ $\qquad \frac{\pi}{12}$ rad $= 15°$

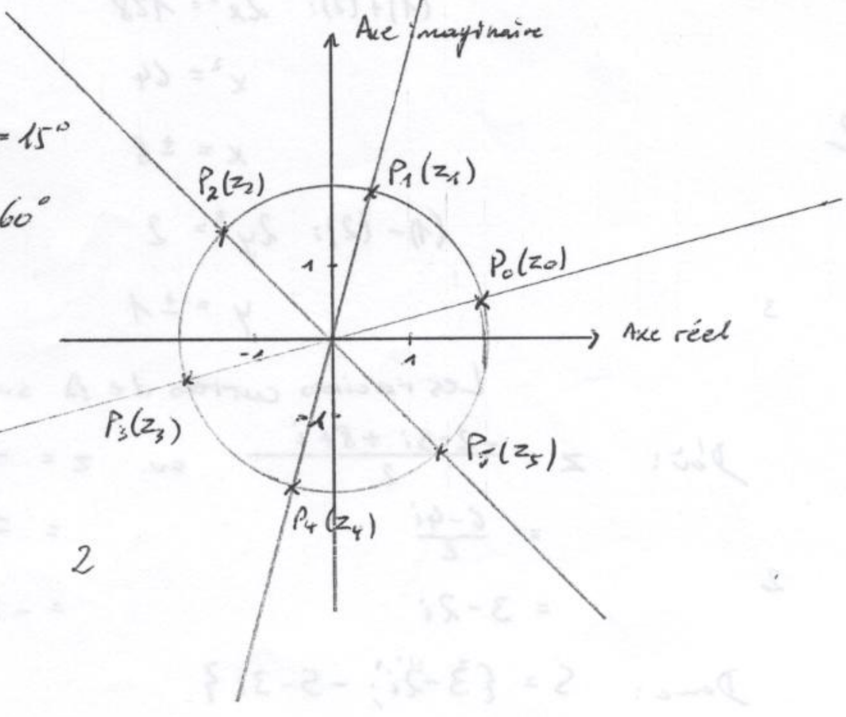
$k=1$: $z_1 = 2\cdot\text{cis}\,\frac{5\pi}{12}$ $\qquad \frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$

$k=2$: $z_2 = 2\,\text{cis}\,\frac{9\pi}{12}$ $\quad \frac{3\pi}{4}$

$z_3 = 2\,\text{cis}\,\frac{13\pi}{12}$

2 $z_4 = 2\,\text{cis}\,\frac{17\pi}{12}$

$z_5 = 2\,\text{cis}\,\frac{21\pi}{12}$



2

II) 1. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot {}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2+0+12 & 7-15-3 \\ -8+0-12 & -28-6+3 \end{pmatrix}$

2

$= \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -20 & -31 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} 3x-2y+6z = -6 \\ -2x-y+2z = 3 \\ 5x+4y-7z = -5 \end{cases}$ La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

• $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{matrix}$

$= 21-20-48+30-24+28$

1

$= -13 \neq 0$ Le système est cramérien !

• Cofacteurs : $A^{11} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -1$ $A^{21} = -1\cdot(-10) = 10$ $A^{31} = 1\cdot 2 = 2$

$A^{12} = -1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -4$ $A^{22} = -51$ $A^{32} = -18$

$A^{13} = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -3$ $A^{23} = -22$ $A^{33} = -7$

• $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 2 \\ -4 & -51 & -18 \\ -3 & -22 & -7 \end{pmatrix}$

4

8

• $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\cdot \operatorname{adj} A = -\dfrac{1}{13}\cdot \operatorname{adj} A$

Or $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ | A^{-1} à gauche

$A^{-1}\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-13}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 10 & 2 \\ -4 & -51 & -18 \\ -3 & -22 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

D'où : $x = -\dfrac{1}{13}\cdot(6+30-10) = -2$

$y = -\dfrac{1}{13}(24-153+90) = 3$

3

$z = -\dfrac{1}{13}\cdot(18-66+35) = 1$

D'où : $S = \{(-2;3;1)\}$

3. $\begin{cases} mx + y = m+2 \\ (m+3)x + (m-1)y = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -mx + m + 2 \\ (m+3)x + (m-1)\cdot(-mx+m+2) = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -mx + m + 2 \\ (m+3)x + (-m^2x) + m^2 + 2m + mx - m - 2 = -2 \end{cases}$

2 $\begin{cases} y = -mx + m + 2 \\ (-m^2 + 2m + 3)\cdot x + m^2 + m = 0 \end{cases}$

Posons $-m^2 + 2m + 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$m_1 = \frac{-2+4}{-2} = -1$

1 $m_2 = \frac{-2-4}{-2} = 3$

1^{er} cas : $m = -1$ $\begin{cases} y = x+1 \\ 0\cdot x + 1 - 1 = 0 \end{cases}$

$S = \{(\alpha ; \alpha+1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

2 Le syst. est formé de 2 éq. de droites confondues.

2^e cas : $m = 3$ $\begin{cases} y = -3x + 5 \\ 0\cdot x + 9 + 3 = 0 \end{cases}$ imposs.

2 $S = \emptyset$

Le syst. est formé de 2 éq. de droites disjointes

3^e cas : $m \neq -1$ et $m \neq 3$ $\begin{cases} y = -m\cdot\frac{m}{m-3} + m + 2 \\ x = \frac{m^2+m}{m^2-2m-3} = \frac{m\cdot(m+1)}{(m+1)(m-3)} = \frac{m}{m-3} \end{cases}$

$\begin{cases} y = \frac{-m^2+m^2+2m-3m-6}{m-3} = \frac{-m-6}{m-3} \\ x = \frac{m}{m-3} \end{cases}$

3

$S = \{(\frac{m}{m-3} ; \frac{-m-6}{m-3})\}$

Le syst. est formé de 2 éq. de droites sécantes.

(5)

III) 1. L'urne contient 10 boules : 6 bleues et 4 rouges.

On tire 3 boules simultanément.

L'ordre n'est pas important. Sans remise.

$\# \Omega = C_{10}^{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$

a) Valeurs de X : 100, 15, 4, 0.

$P(X=100) = P(\text{tirer 3 boules rouges})$

$= \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

$P(X=15) = P(\text{tirer 2 b. r. et 1 b. bl.})$

5 $= \frac{C_4^2 \cdot 6}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$

$P(X=4) = P(\text{tirer 1 b. r. et 2 b. bl.})$

$= \frac{4 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4 \cdot 15}{120} = \frac{1}{2}$

$P(X=0) = P(\text{tirer 3 b. bl.})$

8 $= \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

Loi de probabilité de la v.a. X :

x_i	100	15	4	0
p_i	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Contrôle: $\frac{1}{30} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$!

b) Espérance mathématique:

$E(X) = \sum p_i x_i$

$= \frac{1}{30} \cdot 100 + \frac{3}{10} \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 0$

3 $= \frac{10\cancel{0}}{3\cancel{0}} + \frac{\cancel{45}^{9}}{\cancel{10}_{2}} + 2$

$= \frac{20+27+12}{6}$

$= \frac{59}{6} \doteq 9{,}833$

Comme la mise est plus grande que le gain espéré, le jeu est défavorable au joueur.

2. Terme gén. du dév. de $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{10}$:

$$C_{10}^{k} \cdot (-1)^k \cdot (3x^3)^{10-k} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^k$$

$$= C_{10}^{k} \cdot (-1)^k \cdot 3^{10-k} \cdot 2^k\, x^{30-5k}$$

Pour le terme en x^{-5}: $30 - 5k = -5$

4

$$k = 7$$

D'où: $C_{10}^{7} \cdot (-1)^7 \cdot 3^3 \cdot 2^7 \cdot x^{-5}$

$$= -120 \cdot 27 \cdot 128 \cdot x^{-5}$$

$$= \frac{-414720}{x^5}$$

3. Jeu de 32 cartes.

L'ordre est important. Sans remise.

$\# \Omega = A_{32}^{2} = 992$

2 a) $P(\text{aucun coeur}) = \frac{A_{24}^{2}}{A_{32}^{2}} = \frac{552}{992} = 0{,}556$

2 b) $P(\text{au moins un coeur}) = 1 - P(\text{aucun coeur})$

$$= 1 - 0{,}556$$

$$= 0{,}444$$

c) A : " 1ère carte est un coeur "

4 B : " 2e carte est un coeur "

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ or $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{8 \cdot 7}{32 \cdot 31} = \frac{7}{124}$

$$= \frac{\frac{7}{124}}{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{7}{31}$$