Escamen de fin d'études secondaires 2005 Section D Math I F1

(I) ① $z_1 = \dfrac{3}{1-i} - \dfrac{2i}{1+i}$

$= \dfrac{3(1+i) - 2i(1-i)}{(1-i)(1+i)}$

$= \dfrac{3+3i-2i+2i^2}{1+1} \quad (i^2=-1)$

$= \dfrac{1+i}{2}$

$z_1 = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i}$ (f. alg.)

$= \frac{1}{2}(1+i)$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

$z_1 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}}$ (f. trig.)

$z_2 = \dfrac{3\sqrt{3}+i}{2+i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{(3\sqrt{3}+i)(2-i\sqrt{3})}{(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})}$

$= \dfrac{6\sqrt{3}-9i+2i-i^2\sqrt{3}}{4+(\sqrt{3})^2} \quad (i^2=-1)$

$= \dfrac{7\sqrt{3}-7i}{7} = \dfrac{\cancel{7}(\sqrt{3}-i)}{\cancel{7}}$

$z_2 = \boxed{\sqrt{3}-i}$ (f. alg.)

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)$

$z_2 = \boxed{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ (f. trig)

$|z| = 2$; $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$; $\sin\varphi = -\frac{1}{2} < 0$; $\varphi = -\frac{\pi}{6}$

Forme algébrique de $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$:

$Z = \dfrac{\frac{1}{2}(1+i)}{\sqrt{3}-i}$

$= \frac{1}{2} \cdot \dfrac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}$

$= \frac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1}{3+1}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)\cdot i}{8}$

$= \boxed{\dfrac{\sqrt{3}-1}{8} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{8} \cdot i}$ (I)

Forme trigonométrique de $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$:

$Z = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}}{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$= \dfrac{\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \operatorname{cis}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{12}}$ (II)

② Par identification de (I) et (II) :

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \frac{5\pi}{12} \cdot i = \frac{\sqrt{3}-1}{8} + \frac{\sqrt{3}+1}{8} \cdot i$$

$\frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{8} \quad \Big| \cdot 2\sqrt{2}$

$1 \cdot \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

$\boxed{\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

$\frac{\sqrt{2}}{4} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{8} \quad \Big| \cdot 2\sqrt{2}$

$1 \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

$\boxed{\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

(II) $\boxed{P(z) = z^3 + (3-4i)z^2 + (-1-11i)z - 6i - 6}$

$i^2 = -1$
$i^3 = -i$

Soit $z_0 = \cancel{a} + bi$, $b \in \mathbb{R}$ cette racine imaginaire pure.

$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow P(bi) = 0 \Leftrightarrow (bi)^3 + (3-4i)(bi)^2 + (-1-11i)bi - 6i - 6 = 0$

$\Leftrightarrow b^3 i^3 + (3-4i)b^2 i^2 + (-1-11i)bi - 6i - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -b^3 i - 3b^2 + 4b^2 i - bi + 11b - 6i - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (\underbrace{-3b^2 + 11b - 6}_{A}) + (\underbrace{-b^3 + 4b^2 - b - 6}_{B}) \cdot i = 0$

$\Leftrightarrow A + B \cdot i = 0$

$\Leftrightarrow A = 0$ et $B = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3b^2 + 11b - 6 = 0 \\ -b^3 + 4b^2 - b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2 - 11b + 6 = 0 \ (1) \\ b^3 - 4b^2 + b + 6 = 0 \ (2) \end{cases}$

Rés. de (1) : $3b^2 - 11b + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 121 - 72 = 49 > 0$

$b_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11+7}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$ ✓

$b_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11-7}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (à écarter)

Dans (2) :
$b = 3$: $27 - 36 + 3 + 6 \overset{!}{=} 0$
$b = \frac{2}{3}$: $\frac{8}{27} - \frac{16}{9} + \frac{2}{3} + 6 \neq 0$

D'où la solution : $z_0 = bi = \underline{3i}$

$P(z)$ est divisible par $z - z_0 = z - 3i$:

H	1	3-4i	-1-11i	-6-6i
3i	↓	3i	3+9i	6+6i
	1	3-i	2-2i	0

$P(z) = (z-3i) \cdot Q(z)$

où $Q(z) = z^2 + (3-i)z + 2 - 2i$

Racines de $Q(z)$:

$\Delta = (3-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2-2i)$
$= 9 - 6i + i^2 - 8 + 8i \quad (i^2 = -1)$
$= \boxed{2i}$
$\overset{!}{=} (1+i)^2$

Une r.c. de Δ : $1+i$

$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-(3-i) + (1+i)}{2 \cdot 1} = \dfrac{-3+i+1+i}{2} = \dfrac{-2+2i}{2} = -1+i \\ z_2 = \dfrac{-(3-i) - (1+i)}{2 \cdot 1} = \dfrac{-3\cancel{+i} - 1 \cancel{-i}}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$

Finalement :

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{ 3i ; -1+i ; -2 \}}$$

III $A = \begin{pmatrix} 5 & m-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

1). • $M = (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & m-1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & m-1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & m-1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 16m-16 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} A^2 = \begin{pmatrix} 5 & m-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & m-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 5m-5+2m-2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 7m-7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ 2AB = 2\begin{pmatrix} 5 & m-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 20 & 5m-5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 10m-70 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \end{cases}$$

•• $N = A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 25 & 7m-7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 10m-10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 17m-17 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$

2) $M = N \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 81 & 16m-16 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 17m-17 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 17m-17 = 16m-16$

$\Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow \boxed{m=1}$

IV (S) $\begin{cases} x+y+mz = m^2 \\ x+my+z = 3m \\ mx+y+z = 2 \end{cases}$; $m \in \mathbb{R}$

1) __Méthode de Cramer :__

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} + m\cdot\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix}$$

$= (m-1) - (1-m) + m(1-m^2)$

$= (m-1) + (m-1) - m(m-1)(m+1)$

$= (m-1)(2-m^2-m)$

$= (1-m)(m^2+m-2)$

$= (1-m)(m-1)(m+2)$

$= \boxed{-(m-1)^2(m+2)}$

$\Delta = 9 > 0$

$m_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$m_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

(S) admet une __sol. unique__ $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{m \neq 1 \text{ et } m \neq -2} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$

2) a) $m = -2 \Rightarrow \boxed{\Delta = 0}$

$$(S)\begin{cases} x+y-2z=4 \\ x-2y+z=-6 \\ -2x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=4 \\ 3y-3z=10 \\ 3y-3z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=4 \\ 3y-3z=10 \end{cases}$$

Système simplement indéterminé.

Pour : • $z=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$ •• $\left|\begin{array}{l} 3y = 10+3\lambda \\ y=\frac{10}{3}+\lambda \end{array}\right.$ ∴ $\left|\begin{array}{l} x = 4-y+2z \\ \ \ = 4-\frac{10}{3}-\lambda+2\lambda \\ \ \ = \frac{2}{3}+\lambda \end{array}\right.$

(S) admet une infinité de solutions :

$$S = \left\{\left(\frac{2}{3}+\lambda,\ \frac{10}{3}+\lambda,\ \lambda\right) / \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

IG. Les équations de (S) sont celles de 3 plans sécants suivant une même droite d.
$d = d(A,\vec{u})$ où $A\left(\frac{2}{3},\frac{10}{3},0\right)$ et $\vec{u}(1,1,1)$

b) $m=0 \Rightarrow \Delta = -(0-1)^2(0+2) = \boxed{-2\neq 0} \Rightarrow$ (S) admet une sol. unique

$$(S)\begin{cases} x+y+0z=0 \\ x+0y+z=0 \\ 0x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \\ y+z=2 \end{cases}$$

variante :
$x+y+z=1$
$\left|\begin{array}{l} x+y=0 \Rightarrow z=1 \\ y+z=2 \Rightarrow x=-1 \\ x+z=0 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\2&1&1\end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{2\cdot 1}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1 \\[2ex] y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1&0&0\\1&0&1\\0&2&1\end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{1\cdot(-2)}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\[2ex] z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1&1&0\\1&0&0\\0&1&2\end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{2\cdot(-1)}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(-1,1,1)\}$$

IG. Les équations de (S) sont celles de 3 plans sécants suivant un seul point I où $I(-1,1,1)$.

c) $m = 1 \Rightarrow \boxed{\Delta = 0}$

$$(S)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$ Equations incompatibles ! $S = \emptyset$

IG. Les équations de (S) sont celles de 3 plans strictement parallèles.