CORRIGÉ MATHÉMATIQUES II - 1^e CD

I) $\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x) \end{array}}$ Remarquer que f est impaire !

1) • $D_f = \mathbb{R} = D_{f'}$, donc pas d'A.V.

• $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ donc pas d'A.H.

(4p) • $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2}\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{e^{-x}}{x}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2}\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{xe^x}\right) = \left.\begin{array}{l} \text{"}+\infty - 0\text{"} \text{ si } x \to +\infty \\ \text{"}0 - (-\infty)\text{"} \text{ si } x \to -\infty \end{array}\right\} = +\infty$

<<Car l'exponentielle l'emporte sur x>>

donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, donc pas d'A.O. (B.p. de dir. Oy.)

2) $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(= ch\,x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(2p)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = f(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

$f''(x) = 0 \iff e^x = e^{-x} \quad | \cdot e^x$

(3p) $\iff e^{2x} = 1$

$\iff x = 0$ et comme

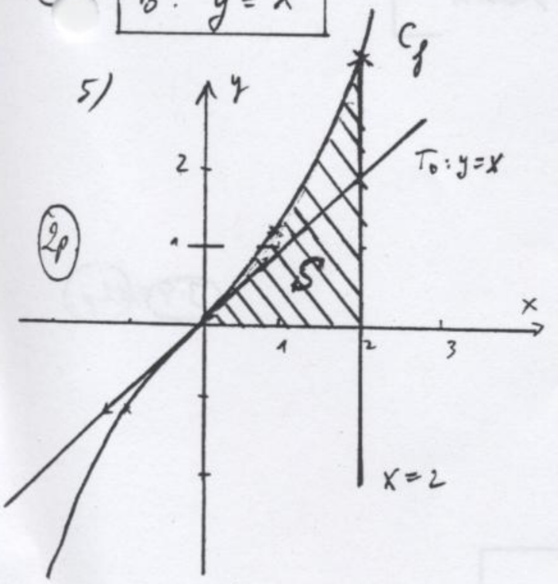
$f''(x)$ change de signe pour $x = 0$, l'origine est un point d'inflexion pour C_f

4) $T: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 = 0$ or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

(2p) $\boxed{T_0: y = x}$

5)

(2p)



$C_f \cap Ox = \{O(0,0)\}$

6) $A = \displaystyle\int_0^2 f(x) - 0\,dx = \int_0^2 \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx$

(2p) $= \left[\dfrac{e^x}{2} + \dfrac{e^{-x}}{2}\right]_0^2 \simeq \underline{2{,}76 \text{ u.a.} \simeq 11 \text{ cm}^2}$ (2cm × 2cm)

7) $V = \pi \displaystyle\int_0^2 f^2(x)\,dx$

(4p) $= \pi \displaystyle\int_0^2 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 dx$

$= \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\int_0^2 e^{2x} - 2 + e^{-2x}\,dx$ (19p)

$= \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{e^{2x}}{2} - 2x + \dfrac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^2$

$\simeq \dfrac{\pi}{4} \cdot 23{,}3$

$\boxed{V \simeq 18{,}3 \text{ u.d.v.}}$ (unités: 2cm·2cm·2cm)

$\boxed{V \simeq 146{,}33 \text{ cm}^3}$

II)

• $I_1(x) = \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx + \int \frac{4}{x^3+4x}\, dx$ C.E.: $x \in \mathbb{R}^0$

V200 $\downarrow$ tcollect V200 $\downarrow$ Expand

$$= -\frac{1}{16}\int (\cos 5x + \cos 3x - 2\cos x)\,dx + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{80}\sin 5x - \frac{1}{48}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{I_1(x) = -\frac{1}{80}\sin 5x - \frac{1}{48}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x + \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}} + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

N.B.: ou bien: ("à la main") $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)\cdot \cos x\, dx = \int \sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x\, dx$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + K, \quad (K \in \mathbb{R})$$

• $I_2 = \int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$ intégrer par parties: $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$, $v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$ C.E $x \in \mathbb{R}$

$= \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 x e^{-x}\, dx$ intégrer par partie: $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$, $v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$

$= -\frac{1}{e} + 2\left[-x e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x}\, dx$ or $\int_0^1 e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1$

$= -\frac{1}{e} - \frac{2}{e} + 2\left(-\frac{1}{e} + 2\right)$

$\boxed{I_2 = -\frac{5}{e} + 2} \simeq 0{,}16$

• $I_3(x) = \int \frac{1}{\cos^4 x}\, dx$ i.pp. $u(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow u'(x) = \frac{+2\sin x}{\cos^3 x}$, $v'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow v(x) = \tan x$ C.E. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\sin x \tan x}{\cos^3 x}\, dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^3 x} - 2\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\, dx \quad \text{or } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

3·4 = 12p.

$I_3(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - 2 I_3(x) + 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx \quad \Big| +2 I_3(x)$

$3 I_3(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} + 2\tan x + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad \Big| :3$

d'où $\boxed{I_3(x) = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\tan x + c', \quad c' \in \mathbb{R}}$

III) 1) $\boxed{e^x + e^{1-x} = e+1}$ (*) $\quad$ C.E. : $x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, l'équation s'écrit en multipliant par e^x les deux membres :

$e^{2x} + e^1 = (e+1)e^x$ $\quad$ poser $y = e^x$

$\Leftrightarrow y^2 - (e+1)y + e = 0$ $\quad$ éq. du 2e degré

3p $\quad \Leftrightarrow y = 1$ ou $y = e$

$\Leftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = e$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ $\quad$ d'où $\boxed{S = \{0, 1\}}$

2) $\boxed{2\ln(2x-1) - \ln(3x-2x^2) > \ln(4x-3) - \ln x}$ (*)

$$\text{CE :} \begin{cases} 2x-1>0 \\ 3x-2x^2>0 \\ 4x-3>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 0 < x < \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{4} \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad D = \left]\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right[$$

$\forall x \in \left]\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right[$, (*) $\Leftrightarrow \ln \dfrac{(2x-1)^2}{3x-2x^2} > \ln \dfrac{4x-3}{x}$ $\quad |\ \ln \nearrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x-1)^2}{3x-2x^2} > \dfrac{4x-3}{x}$ $\quad$ or $\quad 3x - 2x^2 > 0$, $x > 0$

5p. $\quad \Leftrightarrow x(2x-1)^2 > (3x-2x^2)(4x-3)$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 + x > -8x^3 + 18x^2 - 9x$

$\Leftrightarrow 12x^3 - 22x^2 + 10x > 0$

$\Leftrightarrow 2x(\underbrace{6x^2 - 11x + 5}_{}) > 0$

$\Leftrightarrow 2x \cdot f(x) > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x \in \left]\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right[= S}$

D

x	$\frac{3}{4}$	+	$\frac{5}{6}$	+	1	+	$\frac{3}{2}$
$f(x)$		+	0	−	0	+	
$2x \cdot f(x)$	///	+	0	−	0	+	/////

3) • $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x^4 = $ "$0 \cdot (-\infty)$" f.i.

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\ln x^4}{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = $ "$\dfrac{-\infty}{+\infty}$" f.i.

3·2=6p.

(H) $= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\left(\frac{4}{x}\right)}{\left(\frac{-2}{x^3}\right)}$

14p.

$= \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x^2) = \boxed{0}$

• $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\overset{\to -\infty}{\frac{1}{x}}} \overset{\to \ln 1}{\ln(x^2+1)} = 0 \cdot 0 = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{3x-7}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)}\right)^{3x} \cdot \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{-7}$

$= \lim\limits_{\frac{x}{4} \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{12} \underbrace{\left(1 + \frac{4}{x}\right)^{-7}}_{\to 1}$

$= \boxed{e^{12}}$

Examen de fin d'études secondaires : Section C

Corrigé du problème :

1) a) $q = 3 \cdot 11g = 33g$, donc $f(t) = \frac{33}{29,5}(1 - e^{-9t}) - 0,145t$

L'écran graphique de la V200 donne les racines $t = 0$ (évident) et $t = \alpha \approx 7,715h$ ($\approx 7h\ 42,9'$)

Ainsi sur l'intervalle $[0, \alpha]$, la personne a de l'alcool dans le sang.

b) $\forall x \in [0, \alpha]$ $\quad f'(t) = -0,145 \cdot e^{-9t}(e^{9t} - 69,433)$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{9t} - 69,433 = 0 \Leftrightarrow t = \beta \approx 0,471\ h$ $(\approx 28,26')$

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow -(e^{9t} - 69,433) > 0 \Leftrightarrow t < \beta$ et $f'(t) < 0 \Leftrightarrow -(e^{9t} - 69,433) < 0 \Leftrightarrow t > \beta$.

Tableau de variation :

t	0		β		α
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(\beta)$ max	$\searrow$	0

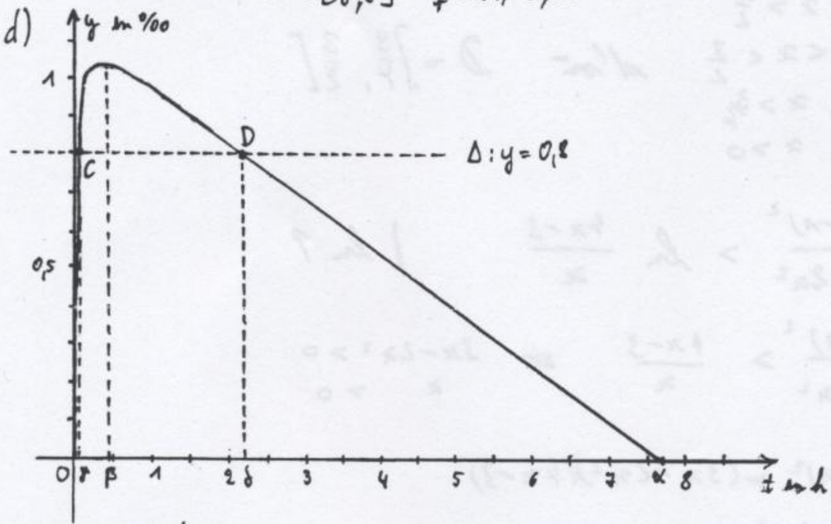
$f(\beta) \approx 1,034$ ‰

c) Soit $y_2(x) = 0,8$ et $\Delta \equiv y = 0,8$.

Graphiquement, la V200 donne $\mathcal{C}_f \cap \Delta = \{C(\gamma; 0,8); D(\delta; 0,8)\}$ avec $\gamma \approx 0,147\ h = 8,82'$ et $\delta \approx 2,198h = 2h\ 11,88'$.

Ainsi la personne ne devrait pas conduire pendant l'intervalle $[\gamma, \delta]$ car d'après le tableau de variation $\forall t \in [\gamma, \delta]$ $f(t) \geq 0,8$.

d)



e) effet $= \int_0^\alpha f(t)\,dt \simeq 4,191$

2) a) $f(t) = \frac{33}{29,5}(1 - e^{-1,2t}) - 0,145t$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t \approx 1,855\ h$ et $f(1,855) \approx 0,729 < 0,8$

Donc le taux d'alcoolémie ne dépasse pas le seuil de 0,8 ‰.

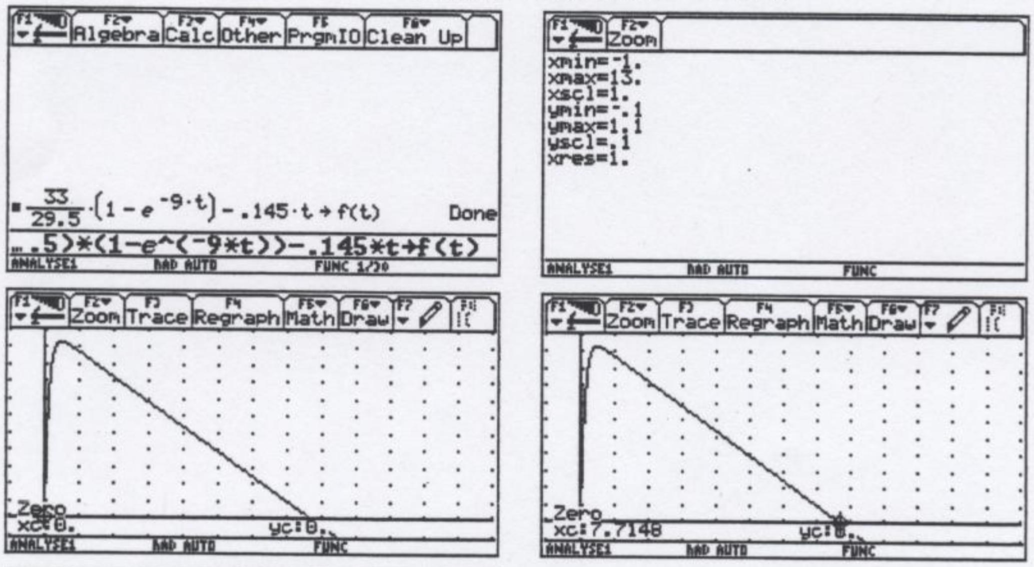
b) $f(t) = \frac{44}{29,5}(1 - e^{-1,2t}) - 0,145t$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t \approx 2,094\ h$ et $f(2,094) \approx 1,067 > 0,8$

Ainsi la personne ne devrait pas boire un quatrième verre.

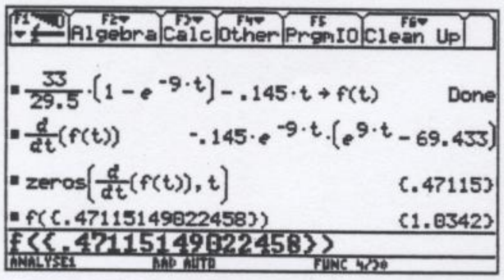
Examen de fin d'études secondaires : Section C

Problème : Écrans de la V200

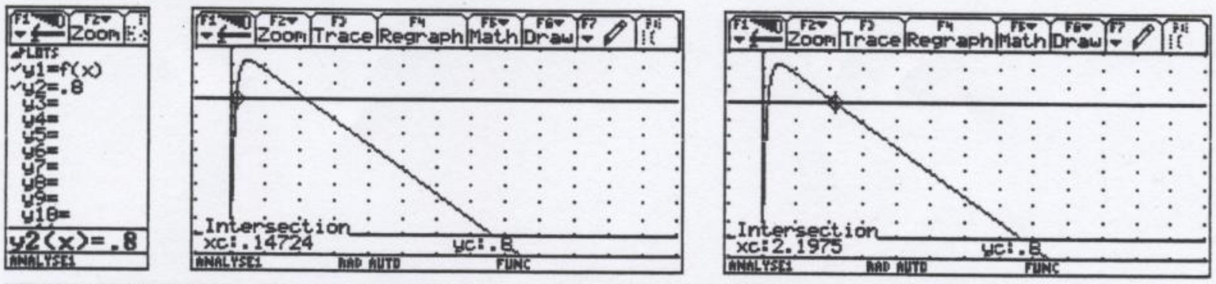
1) a)



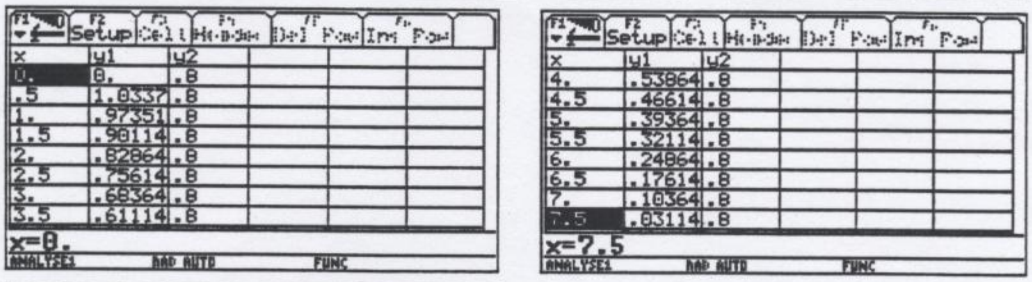
1) b)



1) c)



1) d)



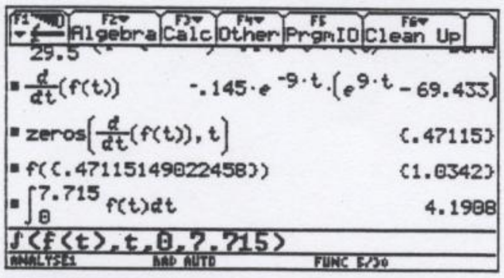
x	y1	y2
0.	0.	.8
.5	1.0337	.8
1.	.97351	.8
1.5	.90114	.8
2.	.82864	.8
2.5	.75614	.8
3.	.68364	.8
3.5	.61114	.8

x=0.

x	y1	y2
4.	.53864	.8
4.5	.46614	.8
5.	.39364	.8
5.5	.32114	.8
6.	.24864	.8
6.5	.17614	.8
7.	.10364	.8
7.5	.03114	.8

x=7.5

1) e)



2)