Question 1

(points 7 + 8)

1.

$$P(z) = z^3 - (\lambda + 2 + i)z^2 + 2(\lambda + 1 + i)z - 2(\lambda + i) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

1)

$$\begin{aligned} P(\lambda+i) &= (\lambda+i)^3 - (\lambda+2+i)(\lambda+i)^2 + 2(\lambda+1+i)(\lambda+i) - 2(\lambda+i) \\ &= (\lambda+i)[(\lambda+i)^2 - (\lambda+2+i)(\lambda+i) + 2(\lambda+1+i) - 2] \\ &= (\lambda+i)0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2)

	1	$-\lambda-2-i$	$2\lambda+2+2i$	$-2\lambda-2i$
$\lambda+i$		$\lambda+i$	$-2\lambda-2i$	$2\lambda+2i$
	1	-2	2	0

Ainsi :

$$P(z) = (z - \lambda - i)(z^2 - 2z + 2)$$

Il reste à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

Réalisant (discriminant) :

$$\rho' = (-1)^2 - 2 = -1$$

Les racines carrées complexes de ρ' sont $-i$ et i et les racines de l'équation sont $1-i$ et $1+i$. Finalement $S = \{\lambda+i, 1-i, 1+i\}$

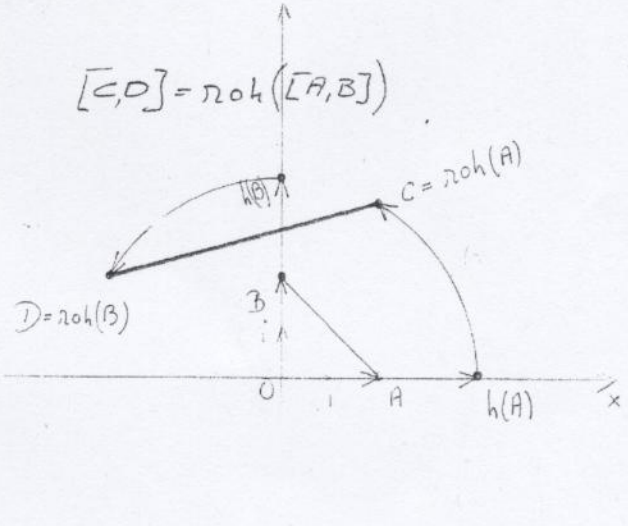
2. 1)

$$\frac{z_C}{z_A} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\text{cis}\,60^\circ$$

$$\frac{z_D}{z_B} = \frac{-2\sqrt{3}+2i}{2i} = \frac{2\sqrt{3}i+2}{2} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\text{cis}\,60^\circ$$

2) On vient de montrer que $z_C = 2\,\text{cis}\,60^\circ z_A$ et que $z_D = 2\,\text{cis}\,60^\circ z_B$ donc C et D sont les images de A et B par l'homothétie h de centre O et de rapport 2, suivie de la rotation r de centre O et d'angle 60°. Il en est de même pour le segment $[C, D]$ qui est l'image du segment $[A, B]$ par $r \circ h$.

3)



Question 2 *(points $3 + 7 + 5$)*

1.

$$\left(4x^2 - \frac{1}{8x}\right)^{16} = \sum_{i=0}^{16} \mathrm{C}_{16}^{i}\left(4x^2\right)^{16-i}\left(-\frac{1}{8x}\right)^{i}$$

terme général :

$$\mathrm{C}_{16}^{i}\left(4x^2\right)^{16-i}\left(-\frac{1}{8x}\right)^{i} = \mathrm{C}_{16}^{i}(-1)^{i}2^{32-5i}x^{32-3i}$$

Pour le terme en x^{17} on obtient $32 - 3i = 17 \Leftrightarrow i = 5$ donc le terme en x^{17} est :

$$\mathrm{C}_{16}^{5}(-1)^{5} \cdot 2^{7}x^{17} = -559104x^{17}$$

2. atteindre une cible avec une probabilité de succès $p = \frac{1}{4}$ et une probabilité d'échec $q = 1 - p = \frac{3}{4}$ est une épreuve de Bernoulli.
Répéter 5 fois cette épreuve dans les mêmes conditions est un schéma de Bernoulli.
Soit la variable aléatoire X est le nombre de succès dont la loi de probabilité est la loi binomiale.

1)

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \mathrm{C}_5^0 p^0 q^5 = 1 - 1\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{1024 - 243}{1024} = \frac{781}{1024} \approx 0,76$$

2) Probabilité pour qu'il atteigne la cible au moins une fois en tirant n fois :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \mathrm{C}_n^0 p^0 q^n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Condition :

$$\begin{array}{rcl} 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n & > & \frac{9}{10} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^n & < & \frac{1}{10} \\ \ln\left(\frac{3}{4}\right)^n & < & \ln\frac{1}{10} \\ n\ln\frac{3}{4} & < & \ln\frac{1}{10} \\ n & > & \frac{\ln 10}{\ln 4 - \ln 3} \\ n & > & 8,004 \end{array}$$

Il doit tirer au moins 9 fois.

3. 1) la loi de probabilité de X :

x_i	10	4	-2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$2\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$

2) Espérance mathématique :

$$E(x) = 10 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot 2\frac{5}{36} - 2 \cdot \frac{25}{36} = 0$$

Le jeu est parfaitement équilibré.

Question 3 *(points 6 + 9)*

1. 1) Une équation focale de $\mathcal{E}$ est :

$$\begin{array}{rcll} d(M,F) & = & \epsilon d(M,d) & \\ (d(M,F))^2 & = & \epsilon^2 (d(M,d))^2 & \\ (x-1)^2+(y-1)^2 & = & \frac{1}{5}(y-13)^2 & \\ (x-1)^2+y^2-2y+1 & = & \frac{1}{5}(y^2-26y+169 & \\ 5(x-1)^2+5y^2-10y+5-y^2+26y-169 & = & 0 & \\ 5(x-1)^2+4(y+2)^2 & = & 180 & \\ \frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{45} & = & 1 & \text{équation réduite dans}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}) \\ \frac{X^2}{36}+\frac{Y^2}{45} & = & 1 & \\ \text{équation réduite dans} & (\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath}) & \text{avec } \Omega(1,-2) & \end{array}$$

2) $\mathcal{E}$ est une ellipse de centre Ω et d'axe focal l'axe des y

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 6 \\ b & = & 3\sqrt{5} \end{array}\right. \Longrightarrow c^2 = b^2 - a^2 = 45 - 36 = 9 \Longrightarrow c = 3$$

Les foyers $F(0,3)$ et $F'(0,-3)$
et les directrices $d \equiv Y = 15$ et $d' \equiv Y = -15$ dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
c'est à dire :
$F'(1,-5)$ et $d' \equiv y = -17$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

2. 1) La méthode du dédoublement donne une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point $M(\alpha,\beta)$:

$$t_M \equiv \beta y = 2x + 2\alpha$$

On en déduit l'équation explicite :

$$y = \frac{2}{\beta}x + \frac{2\alpha}{\beta}$$

2) intersection de t_M avec l'axe des x :

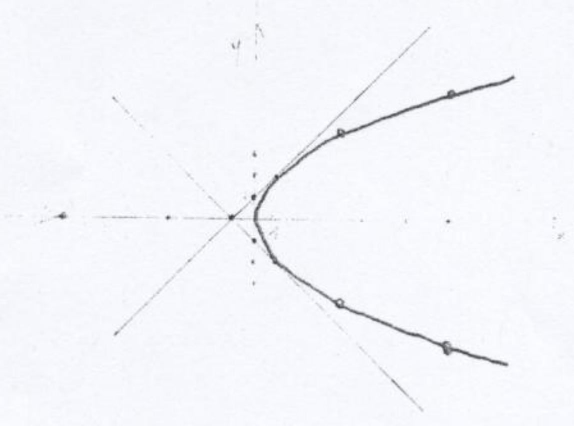
$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \frac{2}{\beta}x + \frac{2\alpha}{\beta} \\ y & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\alpha \\ \qquad y \;=\; 0 \end{array}\right.$$

Donc $A(-\alpha, 0)$

3) L'ordonnée à l'origine pour t_M est $\frac{2\alpha}{\beta}$
De plus $M(\alpha,\beta) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \beta^2 = 4\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\beta^2}{2}$
On en déduit le point d'intersection de t_M avec l'axe des y : $B(0, \frac{\beta}{2})$

4)

$M_1(1,2)$ avec $A_1(-1,0)$ et $B_1(0,1)$
$M_2(4,4)$ avec $A_2(-4,0)$ et $B_2(0,2)$
$M_3(9,6)$ avec $A_3(-9,0)$ et $B_3(0,3)$
$M_4(1,-2)$ avec $A_4(-1,0)$ et $B_4(0,-1)$
$M_5(4,-4)$ avec $A_5(-4,0)$ et $B_5(0,-2)$
$M_6(9,-6)$ avec $A_6(-9,0)$ et $B_6(0,-3)$



Question 4 *(points $1+2+5+2+5$)*

1. La plus petite période commune aux fonctions x et y est évidemment 2π
2. Soient :

$$M(t) = M(x,y) = M(\frac{1}{\cos t}, \tan t)$$

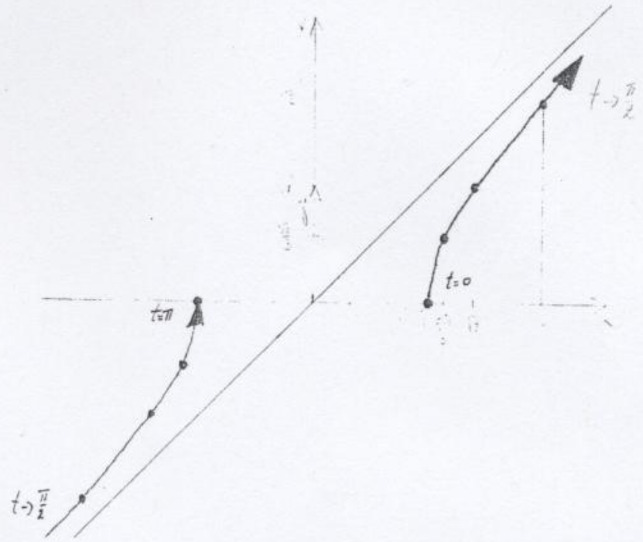
$$M(-t) = M'(x',y') = M'(\frac{1}{\cos -t}, \tan -t)) = M'(\frac{1}{\cos t}, -\tan t)) = M'(x,-y)$$

$$t \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid \in \mathbb{Z}\right\} \Longrightarrow -t \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid \in \mathbb{Z}\right\}$$

La courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe des x.

3.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
x	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



4. On constate que les angles supplémentaires donnent des points symétriques par rapport à l'origine.
5.

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ y = \tan t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = \left(\dfrac{1}{\cos t}\right)^2 \\ y^2 = \tan^2 t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{\cos^2 t} \\ y^2+1 = \tan^2 t + 1 \end{cases} \Longrightarrow x^2 = y^2+1 \Longrightarrow x^2 - y^2 = 1$$

Γ est une hyperbole équilatère d'axe focal l'axe des x.