Corrigé - Mathématiques I 2007

Section D

Question I

1) $2iz^2-(2-i)z+1-i=0$

$\Delta=(2-i)^2-8i(1-i)=4-4i-1-8i-8$

$=-5-12i$

Cherchons les racines carrées complexes de $-5-12i$:

$$\begin{cases} x^2-y^2=-5 & ① \\ 2xy=-12 & ② \\ x^2+y^2=\sqrt{25+144}=13 & ③ \end{cases}$$

Par ② : x et y ont des signes contraires

① + ③ : $2x^2=8 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$

③ - ① : $2y^2=18 \Leftrightarrow y=-3$ ou $y=3$

Les racines carrées complexes cherchées sont $-2+3i$ et $2-3i$

Et donc les solutions de l'équation sont $z_1=\dfrac{2-i-2+3i}{4i}=\dfrac{2i}{4i}=\dfrac{1}{2}$

$z_2=\dfrac{2-i+2-3i}{4i}=\dfrac{4-4i}{4i}\cdot\dfrac{i}{i}=\dfrac{4i+4}{-4}$

$=-1-i$

$S=\left\{\dfrac{1}{2}\,;\,-1-i\right\}$

2) $P(z)=z^4+(1-2i)z^3+(5-2i)z^2+(5-6i)z-6i$

Schéma de Horner

	1	$1-2i$	$5-2i$	$5-6i$	$-6i$
-1		-1	$2i$	-5	$6i$
	1	$-2i$	5	$-6i$	0

	1	$-2i$	5	$-6i$
$3i$		$3i$	-3	$6i$
	1	i	2	$\boxed{0}$

On en tire que

$P(z)=(z+1)(z-3i)(z^2+iz+2)$

Cherchons les racines de z^2+iz+2 :

$\Delta=-1-8=-9=9i^2=(3i)^2$

et donc $z_1=\dfrac{-i+3i}{2}=i$

$z_2=\dfrac{-i-3i}{2}=-2i$

Les racines de $P(z)$ sont donc -1 ; $3i$; i ; et $-2i$.

Factorisation :

$P(z)=(z+1)(z-3i)(z-i)(z+2i)$

Question II

1) $z_1=\dfrac{8(2-i)}{1+i}-\dfrac{(-2+2i)^2}{1-i}$

$=\dfrac{16-8i}{1+i}-\dfrac{\cancel{4}-8i\cancel{-4}}{1-i}$

$=\dfrac{\cancel{16}-16i\cancel{-8i}\cancel{-8}\cancel{+8i}\cancel{-8}}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{-16i}{2}$

$=-8i$

$|z_1|=8$

$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ rad

et donc

$z_1=8\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Les racines cubiques complexes de z_1 sont alors :

$$u_0 = \sqrt[3]{8} \cdot \text{cis} \frac{-\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}$$
$$= 2\cdot \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$u_1 = 2\cdot \text{cis}\frac{\pi}{2}$$

$$u_2 = 2\cdot \text{cis}\frac{7\pi}{6}$$

2) • $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
$$= 2\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\sqrt{3} - i$$

• $z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$|z_3| = \sqrt{2+2} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\varphi = -1\\ \varphi \in 4^e \text{ quadrant}\end{array}\right\} \varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

et donc

$$z_3 = 2\cdot\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

3) $$\frac{z_1\cdot z_3}{z_2} = \frac{8\cdot\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cancel{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cancel{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$= 8\cdot\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)$$
$$= 8\cdot\text{cis}\left(-\frac{6\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} + \frac{10\pi}{12}\right)$$
$$= 8\cdot\text{cis}\frac{\pi}{12}$$

Question III

1) $$\begin{cases} -6x+3y-9z=-6\\ x+2y+z=1\\ 3x-4y+5z=4\end{cases}$$

$$\overset{E_1\leftrightarrow E_2}{\iff}\begin{cases} x+2y+z=1\\ 2x-y+3z=2\\ 3x-4y+5z=4\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} x+2y+z=1\\ -5y+z=0 & E_2\,|\,E_2-2E_1\\ -10y+2z=1 & E_3\,|\,E_3-3E_1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} x+2y+z=1\\ -5y+z=0\\ 0=1 & E_3\,|\,E_3-2E_2\end{cases}$$

Système impossible

$S=\emptyset$

Interprétation géométrique

Il s'agit d'un système d'équations de trois plans de l'espace qui sont deux à deux sécants.

2) $$\begin{cases}(m-1)x - 6y = -1\\ mx - (m+4)y = -\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}(m-1)x - 6y = -1\\ 2mx - (2m+8)y = -1\end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} m-1 & -6\\ 2m & -2m-8\end{vmatrix}$$
$$= -2m^2 - 6m + 8 + 12m$$
$$= -2m^2 + 6m + 8$$
$$= -2(m+1)(m-4)$$

$\Delta = 100$

$m_1 = \frac{-6+10}{-4} = -1$

$m_2 = \frac{-6-10}{-4} = 4$

* **Si $m \neq -1$ et $m \neq 4$**, alors

$$\det A_x = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -2m-8 \end{vmatrix} = 2m+8-6 = 2(m+1)$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ 2m & -1 \end{vmatrix} = -m+1+2m = m+1$$

d'où $x = \dfrac{2(m+1)}{-2(m+1)(m-4)} = \dfrac{1}{4-m}$

$$y = \dfrac{m+1}{-2(m+1)(m-4)} = \dfrac{1}{8-2m}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{4-m} ; \frac{1}{8-2m} \right) \right\}$$

* **Si $m=-1$**, alors le système s'écrit

$$\begin{cases} -2x-6y=-1 \\ -2x-6y=-1 \end{cases}$$

Système indéterminé

On pose $y=k$ $(k \in \mathbb{R})$

et alors $-2x = -1+6k$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1+6k}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -3k + \frac{1}{2}$

$$S = \left\{ \left(-3k+\tfrac{1}{2} ; k \right) \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

* **Si $m=4$**, alors le système s'écrit

$$\begin{cases} 3x-6y=-1 & \mid :3 \\ 8x-16y=-1 & \mid :8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-\frac{1}{3} \\ x-2y=-\frac{1}{8} \end{cases}$$

Système impossible

$$S = \emptyset$$

Question IV

1) Le plan π_1 passe par le point $P(0;-1;1)$ et a comme vecteurs directeurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$M(x;y;z) \in \pi_1$

$\Leftrightarrow \det(\vec{PM};\vec{v}_1;\vec{v}_2)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & 1 & -2 \\ y+1 & 0 & 2 \\ z-1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & 1 \\ y+1 & 0 \\ z-1 & -1 \end{matrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (2z\cancel{-2}+2y\cancel{+2})-(-2x+3y+3)=0$

$\Leftrightarrow 2x-y+2z-3=0$

2) On doit résoudre le système

$$\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ -4x+y-z=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ -y+3z=4 & E_2 \mid E_2+2E_1 \end{cases}$$

Système simplement indéterminé

On pose $z=k$ $(k \in \mathbb{R})$

alors $y=3k-4$

et $2x = 3+3k-4-2k$

$\Leftrightarrow 2x = k-1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}$

et donc on a

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}k-\frac{1}{2} \\ y = 3k-4 \\ z = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

L'intersection des plans π_1 et π_2 est donc la droite qui passe par $A(-\frac{1}{2};-4;0)$ et dont $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

3) $M(x;y;z) \in \Pi_3$

$\Leftrightarrow \vec{BM} \odot \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 1 + 3y - 3 + z - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x + 6y + 2z - 10 = 0$

4) Le vecteur $\vec{CD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d'.

Alors $M(x;y;z) \in d'$

$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{CM} = k \cdot \vec{CD}$

$\Leftrightarrow$ —— " —— $\begin{cases} x+2 = 5k \\ y-1 = -3k \\ z+3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ —— " —— $\begin{cases} \frac{x+2}{5} = k \\ \frac{1-y}{3} = k \\ z = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{5} = \frac{1-y}{3} \\ z = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y + 1 = 0 \\ z = -3 \end{cases}$