Corrigé : Mathématiques II

Question I

voir manuel page 86

Question II

C.E. : (1) $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

(2) $x^2+1>0$ vrai $\forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad D = \left]-1;\tfrac{1}{3}\right[$

(3) $1-3x>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$

$$\forall x \in D \qquad (I) \quad \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln 2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{-\ln 2} \geqslant \frac{\ln(1-3x)}{2\ln 2} \qquad |\cdot 2\ln 2>0$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x+1) - \ln\left(x^2+1\right) \geqslant \ln(1-3x)$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geqslant \ln(1-3x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geqslant 1-3x \quad |\cdot\left(x^2+1\right)>0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \geqslant (1-3x)\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1 \geqslant x^2+1-3x^3-3x$$

$$\Leftrightarrow 3x^3+5x \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x\underbrace{\left(3x^2+5\right)}_{>0} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x \geqslant 0 \qquad\qquad S = \left[0;\tfrac{1}{3}\right[$$

Question III

(a) <u>(1) Domaines</u>

C.E. : (1) $x>0$

(2) $1-\ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq e$

$\operatorname{dom} f =]0;e[\,\cup\,]e;+\infty[= \operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom}_d f$

<u>(2) Limites</u>

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{1-\ln x}_{\to +\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -1$$

$$1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow x<e$$

x	$-\infty$	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$		$\|\|$	$+$	0	$-$	

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to 1}}{\underbrace{1-\ln x}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to 1}}{\underbrace{1-\ln x}_{\to 0^-}} = -\infty \quad \text{A.V. } x=e$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to +\infty}}{\underbrace{1-\ln x}_{\to -\infty}} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to +\infty}}{\underbrace{1-\ln x}_{\to -\infty}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}\left(\underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\to 0}-1\right)} = -1$$

A.H.D. $y=-1$

<u>(3) Dérivée</u>

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(1-\ln x) - \ln x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}{(1-\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}(1-\ln x+\ln x)}{(1-\ln x)^2} = \frac{1}{x(1-\ln x)^2} > 0$$

pas d'extrémum

(d) Dérivée seconde

$u(x)=x(1-\ln x)^2$; $u'(x)=(1-\ln x)^2+x\cdot 2(1-\ln x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=(1-\ln x)(1-\ln x-2)=-(1-\ln x)(1+\ln x)$

$$f''(x)=-\frac{-(1-\ln x)(1+\ln x)}{x^2(1-\ln x)^4}=\frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

signe de $1+\ln x$: $1+\ln x>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$1+\ln x$		$\parallel$	$-$	0	$+$		$+$	
$(1-\ln x)^3$		$\parallel$	$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$\parallel$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	

point d'inflexion $I\left(\frac{1}{e};-\frac{1}{2}\right)$

(4) Tableau de variation

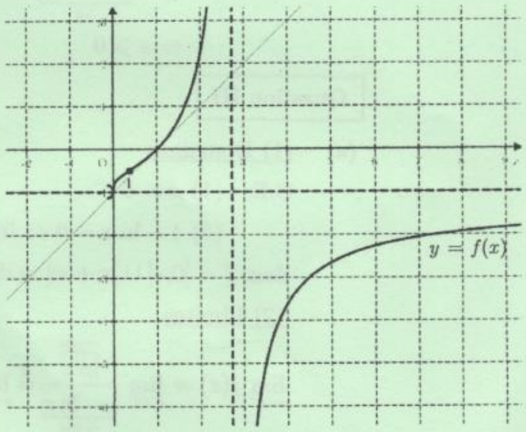
x	$-\infty$	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$		$\parallel$	$+$		$+$	$\parallel$	$+$	
$f''(x)$		$\parallel$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	
$f(x)$		$\parallel$ -1	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\parallel$ $-\infty$	$\nearrow$	-1
		$\parallel$		I		$\parallel$		

(5) Intersection avec les axes

avec Ox : $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ $\quad G_f\cap Ox=\{J(1;0)\}$

avec Oy : $x=0\notin \operatorname{dom} f$ $\quad G_f\cap Oy=\varnothing$

(6) Représentation graphique



(b) équation de la tangente à G_f au point $A(a;f(a))$ $(a\in \operatorname{dom}_d f)$

$t_a \equiv y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a) \Leftrightarrow y-\frac{\ln a}{1-\ln a}=\frac{1}{a(1-\ln a)^2}\cdot(x-a)$

$P(0;-1)\in t_a \quad \Leftrightarrow -1-\frac{\ln a}{1-\ln a}=\frac{1}{\cancel{a}(1-\ln a)^2}\cdot(-\cancel{a})$

$\Leftrightarrow -(1-\ln a)^2-\ln a(1-\ln a)=-1$

$\Leftrightarrow (1-\ln a)^2+\ln a(1-\ln a)=1$

$\Leftrightarrow 1-2\ln a+\ln^2 a+\ln a-\ln^2 a=1$

$\Leftrightarrow -\ln a=0$

$\Leftrightarrow a=1$

Alors : $T(1;0)$ et $t\equiv y=x-1$

Question IV

$f(x)-g(x)=e^{-x}-(2-x^2)e^{-x}=(1-2+x^2)e^{-x}=(x^2-1)\cdot\underbrace{e^{-x}}_{>0}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
conclusion		$\frac{G_f}{G_g}$	$\cap$	$\frac{G_g}{G_f}$	$\cap$	$\frac{G_f}{G_g}$	

L'axe Oy est la droite d'équation $x=0$.

Par suite : $A=-\int_0^1[f(x)-g(x)]dx+\int_1^2[f(x)-g(x)]dx$

Cherchons une primitive de $f-g$:

$$\int (x^2-1)\cdot e^{-x}\,dx \qquad u(x)=x^2-1 \quad ; u'(x)=2x$$
$$v'(x)=e^{-x} \quad ; v(x)=-e^{-x}$$

$$\overset{\text{ipp}}{=} -(x^2-1)e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}\,dx \qquad w(x)=x \quad ; w'(x)=1$$
$$v'(x)=e^{-x} \quad ; v(x)=-e^{-x}$$

$$\overset{\text{ipp}}{=} -(x^2-1)e^{-x}+2\left[-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx\right]$$
$$=-(x^2-1)e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+k$$
$$=-(x^2+2x+1)e^{-x}+k \quad \text{On choisit p.ex. } F(x)=-(x^2+2x+1)e^{-x}=-(x+1)^2e^{-x}$$
$$A=-[F(x)]_0^1+[F(x)]_1^2=-[F(1)-F(0)]+[F(2)-F(1)]=F(0)+F(2)-2\cdot F(1)=-1-\tfrac{9}{e^2}+\tfrac{8}{e}\simeq 0{,}725 \text{ u.a.}$$

Question V

(a) On a : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\} \quad f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}+\dfrac{1}{x+1}$

La primitive est cherchée (p.ex.) sur l'intervalle $I=]-1;+\infty[$ (intervalle contenant 1)

$$\int f(x)\,dx = 3\cdot\int\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int\frac{1}{x+1}\,dx=3\cdot\operatorname{Arctan}x+\ln\left|\underbrace{x+1}_{>0}\right|+k$$

$F(x)=3\cdot\operatorname{Arctan}x+\ln(x+1)+k$

On choisit k tel que $F(1)=\pi \Leftrightarrow 3\cdot\operatorname{Arctan}1+\ln 2+k=\pi \Leftrightarrow \dfrac{3\pi}{4}+\ln 2+k=\pi \Leftrightarrow k=\dfrac{\pi}{4}-\ln 2$

$F(x)=3\cdot\operatorname{Arctan}x+\ln(x+1)+\dfrac{\pi}{4}-\ln 2$

(b) $\displaystyle\int_0^2 30x\sqrt{5-2x}\,dx$

$$u(x)=30x \quad ; u'(x)=30$$
$$v'(x)=(5-2x)^{\frac12}=-\tfrac12\cdot(-2)\cdot(5-2x)^{\frac12} \quad ; v(x)=-\tfrac12\cdot\tfrac23\cdot(5-2x)^{\frac32}=-\tfrac13\cdot(5-2x)^{\frac32}$$

$$=\left[30x\cdot(-\tfrac13)(5-2x)^{\frac32}\right]_0^2+10\cdot\int_0^2(5-2x)^{\frac32}\,dx$$
$$=\left[-10x\sqrt{(5-2x)^3}\right]_0^2-5\cdot\int_0^2(-2)\cdot(5-2x)^{\frac32}\,dx$$
$$=\left[-10x\sqrt{(5-2x)^3}\right]_0^2-5\cdot\left[\tfrac25\cdot(5-2x)^{\frac52}\right]_0^2$$
$$=\left[-10x\sqrt{(5-2x)^3}\right]_0^2-2\cdot\left[\sqrt{(5-2x)^5}\right]_0^2$$
$$=(-20-0)-2\cdot\left(1-\sqrt{5^5}\right)$$
$$=-22+50\sqrt5$$

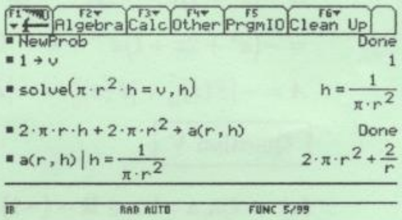
VI. *Motivation*

La première question est de savoir quel rapport doit exister entre le rayon et la hauteur d'un cylindre pour que la surface latérale soit minimale pour un volume donné. On examine d'abord le cas particulier pour un volume donné, ensuite on vérifie que le résultat est vrai quel que soit le volume.

La deuxième question, indépendante de la première, est un problème d'optimisation du bénéfice.

Corrigé

a) i. Désignons par h la hauteur du cylindre (en m) et par r son rayon (en m).
Soit V le volume du cylindre et A la surface de métal nécessaire.

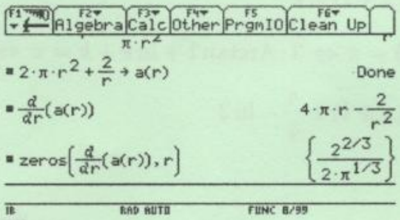


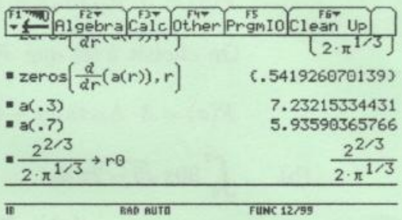
On a :
$$\begin{array}{rcll} V & = & \pi r^2 h = 1 & (1) \\ A & = & 2\pi r h + 2\pi r^2 & (2) \end{array}$$

$(1) \iff h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

Remplaçons dans (2) : $A = 2\pi r \dfrac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \dfrac{2}{r} + 2\pi r^2$

Posons : $A(r) = \dfrac{2}{r} + 2\pi r^2$





On a : $\dfrac{d}{dr} A(r) = 4\pi r - \dfrac{2}{r^2}$

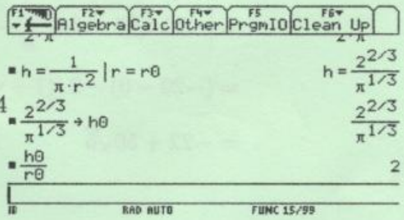
Or : $4\pi r - \dfrac{2}{r^2} = 0 \iff r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}} \approx 0,542$

La fonction $A(r)$ est continue sur $]0; +\infty[$

On a : $A(0,3) \approx 7,2$ et $A(0,7) \approx 5,9$

Donc $A(r)$ admet un minimum en $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

La surface de métal nécessaire à la fabrication du cylindre est donc minimale si $r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

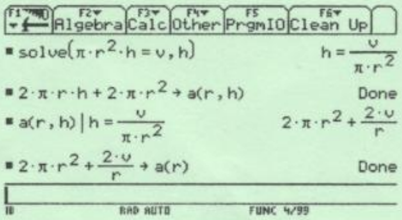


Calculons alors sa hauteur : $h = \dfrac{1}{\pi r^2} = \dfrac{1}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} 2^{\frac{2}{3}} \approx 1,084$

On a : $\dfrac{h}{r} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} 2^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}} = 2$

$h = 2r$.

ii. On a :
$$\begin{array}{rcll} V & = & \pi r^2 h & (1) \\ A & = & 2\pi r h + 2\pi r^2 & (2) \end{array}$$

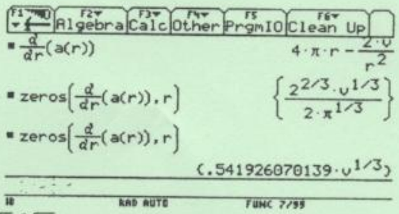


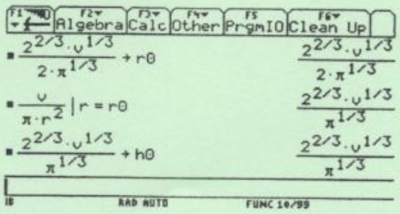
$(1) \iff h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

Remplaçons dans (2) : $A = 2\pi r \dfrac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \dfrac{2V}{r} + 2\pi r^2$

Posons : $A(r) = \dfrac{2V}{r} + 2\pi r^2$

On a : $\dfrac{d}{dr}A(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2}$

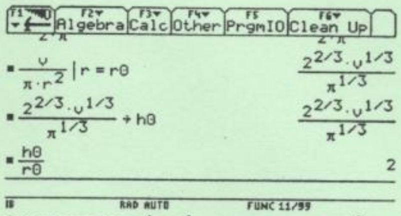




Or : $4\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = 0 \Longleftrightarrow r = \dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{V}}{2\sqrt[3]{\pi}} \approx 0,542\sqrt[3]{V}$

La surface de métal nécessaire à la fabrication du cylindre est donc minimale si $r = \dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{V}}{2\sqrt[3]{\pi}}$.

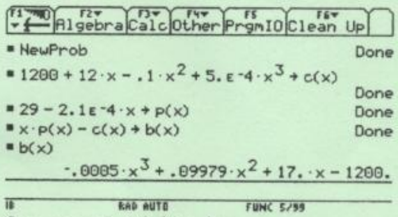
Calculons alors sa hauteur : $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{V}{\pi\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{V}}{2\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{\pi}}$

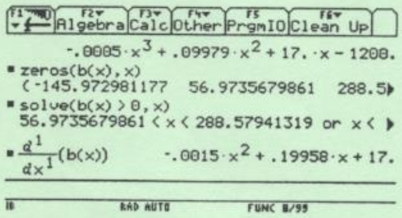


On a : $\dfrac{h}{r} = \dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{\pi}}}{\dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{V}}{2\sqrt[3]{\pi}}} = 2$. D'où : $h = 2r$.

Donc le résultat est vrai en général : pour qu'un cylindre ait une contenance maximale avec une surface latérale minimale, il faut que sa hauteur soit le double de son rayon.

b) i. Le bénéfice en fonction du nombre de cylindres produits est donné par :
$b(x) = x \cdot p(x) - c(x) = -0,000\,5x^3 + 0,099\,79x^2 + 17x - 1200$ avec $30 \leqslant x \leqslant 280$.

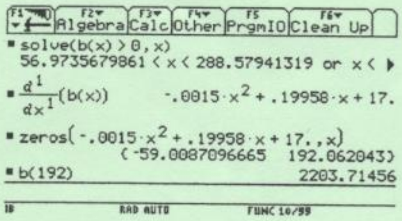




L'entreprise dégage un bénéfice quand $b(x) > 0$

Le nombre minimal de cylindres à fabriquer afin que l'entreprise devienne rentable est donc de 57 pièces.

ii. $\dfrac{d}{dx}b(x) = 17 + 0,199\,58x - 0,0015x^2$



$\dfrac{d}{dx}b(x) = 0 \Longleftrightarrow x = x_0 \approx 192,06$

b est un polynôme, donc continu.

$b(150) \approx 1907,8$

$b(192) \approx 2203,7$

$b(220) \approx 2045,8$

Donc x_0 est bien un maximum.

Le bénéfice est maximal pour une production de 192 cylindres.

iii. Le bénéfice maximal vaut approximativement $b(192) \approx 2204$ €.

.... [15 points]