Question 1

5 Soit $z_1 = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$ une racine imaginaire pure de P.

$$\begin{aligned}
P(z_1) = 0 &\iff b^3 i^3 - (3+4i)b^2 i^2 + (1+12i)bi + 9 - 12i = 0 \\
&\iff -b^3 i + (3+4i)b^2 + (1+12i)bi + 9 - 12i = 0 \\
&\iff \underbrace{(3b^2 - 12b + 9)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(-b^3 + 4b^2 + b - 12)}_{\in\mathbb{R}}\, i = 0 \\
&\iff 3b^2 - 12b + 9 = 0 \text{ et } -b^3 + 4b^2 + b - 12 = 0 \\
&\iff b^2 - 4b + 3 = 0 \text{ et } -b^3 + 4b^2 + b - 12 = 0
\end{aligned}$$

Résolvons $b^2 - 4b + 3 = 0$: $\quad \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 \quad b_1 = \dfrac{4+2}{2 \cdot 1} = 3 \quad b_2 = \dfrac{4-2}{2\cdot 1} = 1$

Comme $-3^3 + 4 \cdot 3^2 + 3 - 12 = 0$ et $-1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 12 \neq 0$, $z_1 = 3i$ est la seule racine imaginaire pure de P.

3 Factorisation de P à l'aide du schéma de Horner ou par division polynomiale :

	1	$-3-4i$	$1+12i$	$9-12i$
$\cdot 3i$		$3i$	$3-9i$	$-9+12i$
	1	$-3-i$	$4+3i$	0

Ainsi : $P(z) = (z-3i)\cdot(z^2 + (-3-i)z + 4 + 3i)$

1 $P(z) = 0 \iff z = 3i$ ou $z^2 + (-3-i)z + 4 + 3i = 0$. Résolvons $z^2 + (-3-i)z + 4 + 3i = 0$:
$\Delta = (-3-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4+3i) = 9 + 6i + i^2 - 16 - 12i = -8 - 6i$

4 Calculons les racines carrées de Δ :

$$(x+iy)^2 = -8 - 6i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & ① \\ 2xy = -6 & ② \end{cases} \qquad \text{x et y sont de signes contraires}$$

Comme $x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10$, nous avons à résoudre

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & ① \\ x^2 + y^2 = 10 & ③ \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3 \end{cases}$$

Comme x et y sont de signes contraires, les deux racines carrées de Δ sont $1 - 3i$ et $-1 + 3i$.

2 Ainsi $z_2 = \dfrac{-(-3-i) + (1-3i)}{2 \cdot 1} = \dfrac{4-2i}{2} = 2 - i$ et $z_3 = \dfrac{-(-3-i) + (-1+3i)}{2\cdot 1} = \dfrac{2+4i}{2} = 1 + 2i$ sont les deux autres racines de P.

Question ~~3~~2

4 1. $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{3} \mod 2\pi$

$\sin\theta_1 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \arg z_1 = \frac{\pi}{3} \mod 2\pi$

$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

$|z_2| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\cos\theta_2 = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta_2 = -\frac{\pi}{4} \mod 2\pi$

$\sin\theta_2 = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \arg z_2 = -\frac{\pi}{4} \mod 2\pi$

$z_2 = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

3 2. $|Z| = \dfrac{|z_1|^2}{|z_2|} = \dfrac{(2\sqrt{3})^2}{3\sqrt{2}} = \dfrac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \arg Z &= 2\arg z_1 - \arg z_2 && \text{mod } 2\pi \\ &= 2\cdot\tfrac{\pi}{3} - \left(-\tfrac{\pi}{4}\right) && \text{mod } 2\pi \\ &= \tfrac{11\pi}{12} && \text{mod } 2\pi \end{aligned}$$

$$Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{11\pi}{12} + i\sin\tfrac{11\pi}{12}\right)$$

4 3. $Z = \dfrac{z_1^2}{z_2} = \dfrac{(\sqrt{3}+3i)^2}{3-3i} = \dfrac{3+6\sqrt{3}i+9i^2}{3-3i} = \dfrac{-6+6\sqrt{3}i}{3-3i} = 2\cdot\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{1-i} = 2\cdot\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)(1+i)}{1-i^2}$

$= 2\cdot\dfrac{-1-i+\sqrt{3}i-\sqrt{3}}{2} = (-1-\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)$

4 4. Par comparaison des formes algébrique et trigonométrique de Z nous obtenons :

- $2\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{12} = -1-\sqrt{3} \iff \cos\frac{11\pi}{12} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $2\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{12} = \sqrt{3}-1 \iff \sin\frac{11\pi}{12} = \dfrac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Question ~~4~~3

6 1. $\begin{cases} 2x-3y = 4 \\ 4x-5y+z = 7 \\ 2x-y-3z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-3y = 4 \\ y+z = -1 & ②-2\cdot① \\ 2y-3z = 1 & ③-① \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-3y = 4 \\ y+z = -1 \\ -5z = 3 & ③-2\cdot② \end{cases}$

Ainsi $z = -\frac{3}{5}$, $y = -1-z = -\frac{2}{5}$ et $x = \frac{4+3y}{2} = \frac{7}{5}$. Par conséquent, $S = \left\{\left(\frac{7}{5}; -\frac{2}{5}; -\frac{3}{5}\right)\right\}$

4 2. $\begin{cases} x + z = 3 \\ mx+2y+2z = 4 \\ y+mz = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 3 \\ y+mz = 1 & ②\leftrightarrow③ \\ mx+2y+2z = 4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + z = 3 \\ y + mz = 1 \\ 2y + (2-m)z = 4-3m & ③-m\cdot① \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 3 \\ y+mz = 1 \\ (2-3m)z = 2-3m & ③-2\cdot② \end{cases}$

3 - Si $m \neq \frac{2}{3}$, on a $z = 1$, $y = 1-m$ et $x = 2$. Le système a un solution unique $(2; 1-m; 1)$. Il est formé des équations de trois plans qui se coupent au point $I(2; 1-m; 1)$.

3 - Si $m = \frac{2}{3}$, le système s'écrit : $\begin{cases} x+z = 3 \\ y + \frac{2}{3}z = 1 \\ 0z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3-z \\ y = 1-\frac{2}{3}z \end{cases}$

Le système est indéterminé et $S = \left\{\left(3-z; 1-\frac{2}{3}z; z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$. Il est formé par des équations de trois plans passant par une même droite.

Question 4

6 1. - Déterminons les composantes d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$:
   - Si $x = 0$, alors $y = 5$ et $z = -6$. Ainsi $K(0; 5; -6) \in \mathcal{D}$
   - Si $x = 1$, alors $y = 3$ et $z = -4$. Ainsi $L(1; 3; -4) \in \mathcal{D}$.
   - Ainsi $\vec{u} = \overrightarrow{KL}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. On a : $\vec{u}(1; -2; 2)$.
- $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \odot \vec{u} = 0 \iff (x-3)\cdot 1 + (y-2)\cdot(-2) + (z-1)\cdot 2 = 0 \iff x - 2y + 2z = 1$

2 2. Comme $\overrightarrow{BC}(4; 4; -7)$ n'est pas colin. au vecteur normal $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$, BC n'est pas perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

6 3. $\mathcal{Q}$ est le plan passant par B et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$.

$$M(x;y;z) \in \mathcal{Q} \iff \begin{vmatrix} x+4 & 4 & 1 \\ y+1 & 4 & -2 \\ z-3 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\iff (x+4)\cdot(-6) - (x+1)\cdot 15 + (z-3)\cdot(-12) = 0$

$\iff -6x - 24 - 15y - 15 - 12z + 36 = 0 \iff -6x - 15y - 12z - 3 = 0 \iff 2x + 5y + 4z + 1 = 0$