Corrigé

I 1) $\begin{cases} 3x - 4y + 13z = 2 \\ x - 2y + 3z = -2 \\ 2x - 5y + 4z = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = -2 & E_1 \\ 2x - 5y + 4z = -8 & E_2 \\ 3x - 4y + 13z = 2 & E_3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x - 2y + 3z = -2 & E_1 \\ -y - 2z = -4 & E'_2 = E_2 - 2E_1 \\ 2y + 4z = 8 & E'_3 = E_3 - 3E_1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x - 2y + 3z = -2 & E_1 \\ -y - 2z = -4 & E'_2 \\ 0z = 0 & E''_3 = E'_3 + 2E'_2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -7z + 6 \\ y = -2z + 4 \\ z \text{ quelconque} \end{cases}$

d'où $S = \{(-7z+6, -2z+4, z),\ z \in \mathbb{R}\}$

En posant $z = k$, le système précédent s'écrit $\begin{cases} x = -7k + 6 \\ y = -2k + 4 \\ z = k \end{cases}$

ce qui correspond à un système d'équations paramétriques de droite.

Donc les trois plans qui correspondent aux trois équations du système donné se coupent suivant la droite qui passe par $A(6,4,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-7,-2,1)$.

2) La coordonnée (x,y,z) de P vérifie le système

$\begin{cases} x = -2k + 1 \\ y = 3k - 2 \\ z = k + 5 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2k + 1 \\ y = 3k - 2 \\ z = k + 5 \\ 2(-2k+1) - (3k-2) + 2(k+5) = 4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -2k + 1 \\ y = 3k - 2 \\ z = k + 5 \\ -4k + 2 - 3k + 2 + 2k + 10 = 4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ z = 7 \\ k = 2 \end{cases}$ ~~d'où P(−3, 4, 7)~~

2)

M$(x,y,z) \in \Pi$ ssi il existe deux réels k et h tels que $\vec{EM} = k\vec{u} + h\vec{v}$

ssi $\begin{cases} x - 1 = k\cdot(-1) + h\cdot 0 \\ y + 2 = k\cdot 3 + h\cdot 2 \\ z - 5 = k\cdot 1 + h\cdot 1 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x = -k + 1 \\ y = 3k + 2h - 2 \\ z = k + h + 5 \end{cases}$ (équations paramétriques de Π)

$$\text{ssi} \begin{cases} k = 1 - x \\ y = 3 - 3x + 2k - 2 \\ z = 1 - x + k + 5 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \begin{cases} k = 1 - x \\ y = 1 - 3x + 2\,(x + z - 6) \\ k = x + z - 6 \end{cases}$$

D'où l'équation cartésienne $x + y - 2z + 11 = 0$

II 1) $8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \leq \frac{1}{32} \cdot 2^{3x-1}$

$2^3 \cdot \left(2^{-2}\right)^{x^2} \leq 2^{-5} \cdot 2^{3x-1}$

$2^{3-2x^2} \leq 2^{3x-6}$

$3 - 2x^2 \leq 3x - 6$

$-2x^2 - 3x + 9 = 0$

$\Delta = 9 + 72 = 81 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3+9}{-4} = -3 \\ x_2 = \frac{3-9}{-4} = \frac{3}{2} \end{cases}$

Tableau des signes

x		-3		$\frac{3}{2}$	
$-2x^2 - 3x + 9$	$-$	0	$+$	0	$-$

d'où $S = \leftarrow ; -3\,] \cup [\,\frac{3}{2} ; \rightarrow$

2) $2 \log_{\frac{1}{3}} (3 - x) = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1) - 1$

CE : (1) $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$
(2) $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$\log_{\frac{1}{3}} (3-x)^2 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{3}} (x+1)$

$x \in D = \,]-1, 3[$

$\frac{1}{3} (3 - x)^2 = x + 1 \quad | \cdot 3$

$9 - 6x + x^2 = 3x + 3$

$x^2 - 9x + 6 = 0$

$\Delta = 81 - 24 = 57 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{9 + \sqrt{57}}{2} \notin D \\ x_2 = \frac{9 - \sqrt{57}}{2} \in D \end{cases}$

d'où $S = \left\{ \frac{9 - \sqrt{57}}{2} \right\}$

III 1) a) $\dfrac{e^2 \sqrt{e}}{\sqrt[3]{e^4}} = e^{\frac{5}{2}} \cdot e^{-\frac{4}{3}} = e^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{e^7} = e \sqrt[6]{e}$

b) $\sqrt[3]{\log_4 (\pi - 1)} = \sqrt[3]{\dfrac{\ln(\pi - 1)}{\ln 4}} \approx 0{,}82$

2) * $f(x) = 7^{2x} - \log_7 2x \qquad \text{dom } f = \mathbb{R}_0^+$

$f'(x) = 7^{2x} \ln 7 \cdot 2 - \dfrac{1}{2x \ln 7} \cdot 2 = 2 \ln 7 \cdot 7^{2x} - \dfrac{1}{x \ln 7}$

* $g(x) = \dfrac{e^{1+3x}}{1 + 3x} \qquad \text{dom } g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$

$g'(x) = \dfrac{e^{1+3x} \cdot 3(1+3x) - e^{1+3x} \cdot 3}{(1+3x)^2} = \dfrac{3e^{1+3x}(1+3x-1)}{(1+3x)^2} = \dfrac{9x e^{1+3x}}{(1+3x)^2}$

3) $f(x) = x^2 \ln x^2$

a) CE : $x^2 > 0$ vrai pour tout $x \neq 0$, d'où dom $f = \mathbb{R}_0$.

$f'(x) = 2x \ln x^2 + \cancel{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} \cdot 2x = 2x\,(1 + \ln x^2)$

b) équation de la tangente : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$\Leftrightarrow y - 0 = 2(x-1)$

$\Leftrightarrow y = 2x - 2$

IV 1) $\int \left(7^{4x} + \frac{1}{4x} + 4x^7\right) dx = \frac{1}{4}\int 4 \cdot 7^{4x} dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\, dx + 4\int x^7 dx$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{7^{4x}}{\ln 7} + \frac{1}{4} \cdot \ln|x| + 4 \cdot \frac{x^8}{8} + k$

$\frac{7^{4x}}{4\ln 7} + \frac{\ln|x|}{4} + \frac{x^8}{2} + k$

$\int \underbrace{(x^2-1)}_{g'} \underbrace{\ln 2x}_{f}\, dx$

$\begin{cases} f(x) = \ln 2x \;,\; f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x^2 - 1 \;,\; g(x) = \frac{x^3}{3} - x \end{cases}$

$= \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \ln 2x - \int \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \frac{1}{x}\, dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \ln 2x - \int \left(\frac{x^2}{3} - 1\right) dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \ln 2x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + x + k$

$= \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \ln 2x - \frac{x^3}{9} + x + k$

2) $f(x) = x^2 + 2x$

a) racines : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$

Tableau des signes

x		-2		0	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

b) Comme $f(x) \leq 0$ pour $x \in [-2, 0]$, l'aire est égale à

$\mathcal{A} = -\int_{-2}^{0} f(x)\, dx$

$= -\int_{-2}^{0} (x^2 + 2x)\, dx$

$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} - \left[x^2\right]_{-2}^{0}$

$= -\left(0 + \frac{8}{3}\right) - (0 - 4)$

$= -\frac{8}{3} + 4$

$= \frac{4}{3}$ u.a.