Corrigé

I) 1) $z' = \dfrac{z-4+3i}{z-i}$

pos : $z = x+yi \quad (x,y \in \mathbb{R}) \quad (x,y) \neq (0,1)$

$$z' = \frac{x+yi-4+3i}{x+yi-i}$$

$$= \frac{(x-4)+(y+3)i}{x+(y-1)i} \cdot \frac{x-(y-1)i}{x-(y-1)i}$$

$$= \frac{x(x-4)-(x-4)(y-1)i+x(y+3)i+(y+3)(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+y^2-y+3y-3+(\cancel{xy}+3x-\cancel{xy}+x+4y-4)i}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+y^2+2y-3+(4x+4y-4)i}{x^2+(y-1)^2}$$

$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4x+4y-4=0$ et $(x,y) \neq (0,1)$

$\Leftrightarrow \underbrace{x+y-1=0}_{\text{droite } \Delta}$ " " "

$A(0,1) \in \Delta$, car $0+1-1 \overset{!}{=} 0$

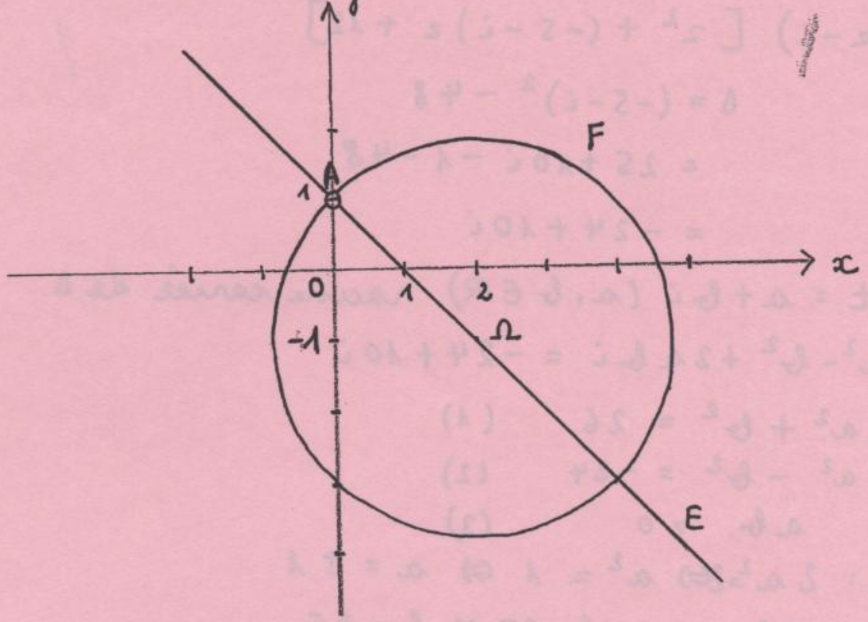
$\Rightarrow E = \Delta \setminus \{A\}$

$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1-4-1-3=0$ et $(x,y) \neq (0,1)$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x-2)^2+(y+1)^2=8}_{\text{cercle } \mathcal{C}(\Omega(2,-1),\, r=2\sqrt{2})}$ " " "

$A(0,1) \in \mathcal{C}$, car $4+4 \overset{!}{=} 8$

$\Rightarrow F = \mathcal{C} \setminus \{A\}$



2) $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 12i$

a) $P(i) = 0 \Leftrightarrow -i - \alpha + \beta i - 12i = 0$

$\Leftrightarrow -\alpha + \beta i = 13i \quad | \cdot 2$

$P(2) = 10 - 10i \Leftrightarrow 8 + 4\alpha + 2\beta - 12i = 10 - 10i$

$\Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta = 2 + 2i \quad | : 2$

$$\left.\begin{cases} -2\alpha + 2\beta i = 26i & (1) \\ 2\alpha + \beta = 1 + i & (2) \end{cases}\right| +$$

$\beta(1+2i) = 1 + 27i$

$\beta = \frac{1+27i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i}$

$= \frac{1 - 2i + 27i + 54}{1+4}$

$= \frac{55 + 25i}{5}$

$\beta = 11 + 5i$

Dans (2) : $2\alpha + 11 + 5i = 1 + i$

$2\alpha = -10 - 4i$

$\alpha = -5 - 2i$

b) $P(z) = z^3 - (5+2i)z^2 + (11+5i)z - 12i$

d'après a), i est une solution de l'éq. $P(z) = 0$.

	1	$-5-2i$	$11+5i$	$-12i$
i		i	$1-5i$	$12i$
	1	$-5-i$	12	0

$P(z) = (z - i)\left[z^2 + (-5-i)z + 12\right]$

$\Delta = (-5-i)^2 - 48$

$= 25 + 10i - 1 - 48$

$= -24 + 10i$

pos : $t = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ racine carrée de Δ

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = -24 + 10i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 26 & (1) \\ a^2 - b^2 = -24 & (2) \\ ab > 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2)$: $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

$(1) - (2)$: $2b^2 = 50 \Leftrightarrow b^2 = 25 \Leftrightarrow b = \pm 5$

③

D'après (3) : racines carrées de Δ : $t_1 = 1+5i$

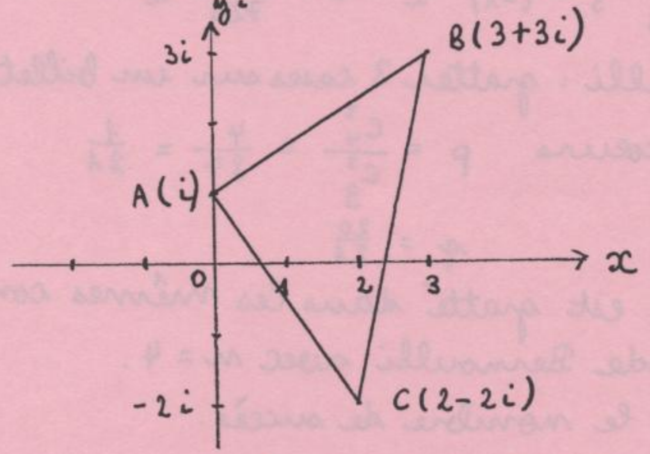
$t_2 = -1-5i$

$$z_1 = \frac{5+i+1+5i}{2} = \frac{6+6i}{2} = 3+3i$$

$$z_2 = \frac{5+i-1-5i}{2} = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$$

$S = \{ i ,\ 3+3i ,\ 2-2i \}$

c)



$\overline{AB} = |3+3i-i| = |3+2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\overline{AC} = |2-2i-i| = |2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\Big\} =$ Le Δ(ABC) est isocèle de sommet principal A

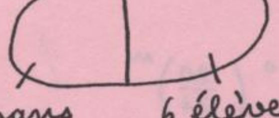
$\overline{BC} = |2-2i-3-3i| = |-1-5i| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

On a : $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, car $26 \stackrel{!}{=} 13+13$

$\Rightarrow$ Le Δ(ABC) est rectangle en A.

Donc le Δ(ABC) est isocèle et rectangle en A.

II) 1) a)



6 élèves sans Claudine, sans Martine

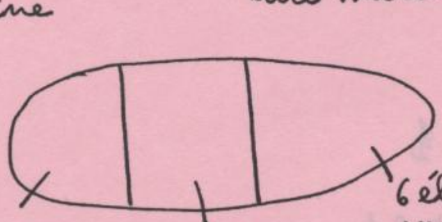
6 élèves avec Claudine, avec Martine

nombre de groupes

$= C_{10}^{6} + C_{10}^{4}$

$= 210 + 210 = 420$

b)



6 élèves avec Pierre, sans Jean

6 élèves avec Jean, sans Pierre

6 élèves sans Jean, sans Pierre

nombre de groupes

$= C_{10}^{5} + C_{10}^{5} + C_{10}^{6}$

$= 252 + 252 + 210$

$= 714$

ou : $C_{12}^{6} - C_{10}^{4} = 924 - 210 = 714$

2) $(\sqrt{3}x^2 - \frac{1}{3x})^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k} (\sqrt{3}x^2)^{15-k} (-\frac{1}{3x})^{k}$

$= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k}\, 3^{\frac{15-k}{2}}\, x^{30-2k} (-1)^k\, 3^{-k}\, x^{-k}$

$= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k}\, 3^{\frac{15-3k}{2}} (-1)^k\, x^{30-3k}$

<u>Cond :</u> $30-3k = 3 \Leftrightarrow -3k = -27 \Leftrightarrow k = 9$

terme en $x^3 = C_{15}^{9}\, 3^{-6} (-1)^9 x^3 = -\frac{5005}{729} x^3$

3) a) épreuve de Bernoulli : gratter 3 cases sur un billet

succès : gratter 3 coeurs $\quad p = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$

échec : $\quad q = \frac{20}{21}$

Comme chaque billet est gratté dans les mêmes conditions, on a un schéma de Bernoulli avec $n = 4$.

La v. a. X donne le nombre de succès.

La loi de X est une loi binomiale :

$\forall k \in \{0, 1, \dots, 4\},\ p(X = k) = C_4^k \left(\frac{1}{21}\right)^k \left(\frac{20}{21}\right)^{4-k}$

b) $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - C_4^0 \left(\frac{1}{21}\right)^0 \left(\frac{20}{21}\right)^4$

$= 1 - \frac{160'000}{194'481} = \frac{34'481}{194'481} \simeq 0{,}177$

c) $E(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{21} = \frac{4}{21} \simeq 0{,}190$

$V(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{21} \cdot \frac{20}{21} = \frac{80}{441} \simeq 0{,}181$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{4\sqrt{5}}{21} \simeq 0{,}426$

d) Soit n le nombre de billets.

$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - C_n^0 \left(\frac{1}{21}\right)^0 \left(\frac{20}{21}\right)^n$

$p(X \geq 1) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\left(\frac{20}{21}\right)^n > -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{20}{21}\right)^n < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{20}{21}\right)^n < \ln \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{20}{21}} \simeq 14{,}21$

Donc Monsieur Dupont aurait dû acheter au moins 15 billets.

III) 1) $C : x = 2 - \sqrt{4-y} \Leftrightarrow x - 2 = -\sqrt{4-y} \mid (\,)^2$ Cond: $y \leq 4$ et $x \leq 2$ ⑤

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 - y$

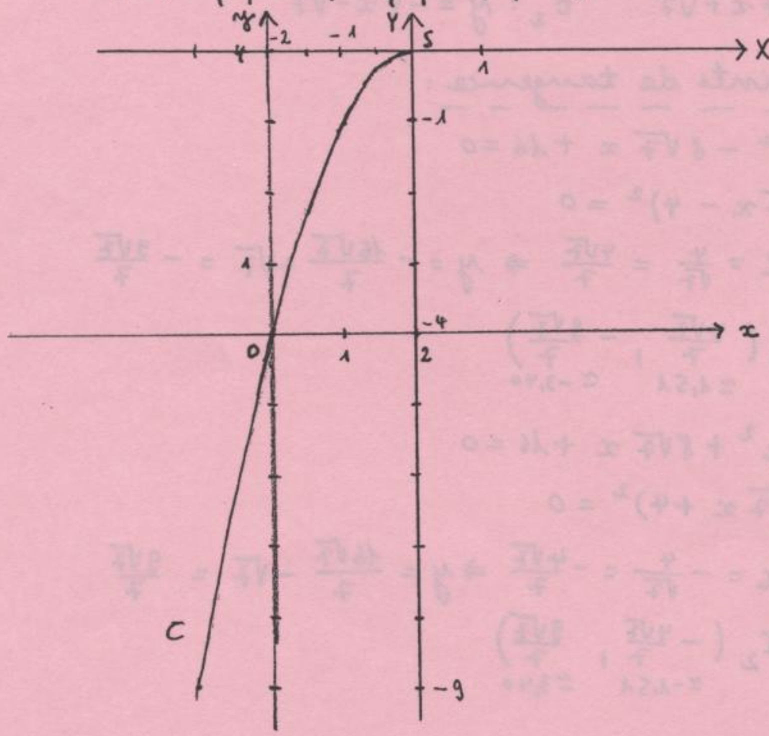
$\Leftrightarrow y - 4 = -(x-2)^2$ et $y \leq 4$ et $x \leq 2$

pos: $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 4 \end{cases}$

$Y = -X^2$ et $X \leq 0$

C est une demi-parabole de sommet $S(2, 4)$.

X	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	-3
Y	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	-4	-9



2) a) $\Gamma : x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ $\quad a = 1,\ b = 3 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$

Γ est une hyperbole de centre O et d'axe focal l'axe des x.

sommets: $(1,0)$, $(-1,0)$

foyers: $(\sqrt{10},0)$, $(-\sqrt{10},0)$

directrices: $x = \pm \frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$

asymptotes: $y = \pm \frac{b}{a} x \Leftrightarrow y = \pm 3x$

b) $d : x - 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow 4y = x + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

$t \perp d \Leftrightarrow m m' = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} m' = -1 \Leftrightarrow m' = -4$

$t : y = -4x + p$

$t \cap \Gamma : \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x^2 - y^2 = 9 \quad (1) \\ y = -4x + p \quad (2) \end{cases}$

(2) dans (1) : $9x^2-(-4x+p)^2=9$

$$9x^2-(16x^2-8px+p^2)=9$$

$$9x^2-16x^2+8px-p^2=9$$

$$-7x^2+8px-p^2-9=0 \quad | \cdot(-1)$$

$$7x^2-8px+p^2+9=0$$

$$\Delta = 64p^2-28(p^2+9) = 64p^2-28p^2-252 = 36p^2-252$$

$$\Delta = 36(p^2-7)$$

t est tangente à $\Gamma \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow p^2=7 \Leftrightarrow p=\pm\sqrt{7}$

tangentes : t_1 : $y=-4x+\sqrt{7}$ $\quad t_2$: $y=-4x-\sqrt{7}$

Coordonnées des points de tangence :

$\boxed{t_1 \cap \Gamma}$: $p=\sqrt{7}$: $7x^2-8\sqrt{7}\,x+16=0$

$$(\sqrt{7}x-4)^2=0$$

$$x=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7} \Rightarrow y=-\frac{16\sqrt{7}}{7}+\sqrt{7}=-\frac{9\sqrt{7}}{7}$$

$$I_1\left(\underset{\simeq 1,51}{\frac{4\sqrt{7}}{7}},\ \underset{\simeq -3,40}{-\frac{9\sqrt{7}}{7}}\right)$$

$\boxed{t_2 \cap \Gamma}$: $p=-\sqrt{7}$: $7x^2+8\sqrt{7}\,x+16=0$

$$(\sqrt{7}x+4)^2=0$$

$$x=-\frac{4}{\sqrt{7}}=-\frac{4\sqrt{7}}{7} \Rightarrow y=\frac{16\sqrt{7}}{7}-\sqrt{7}=\frac{9\sqrt{7}}{7}$$

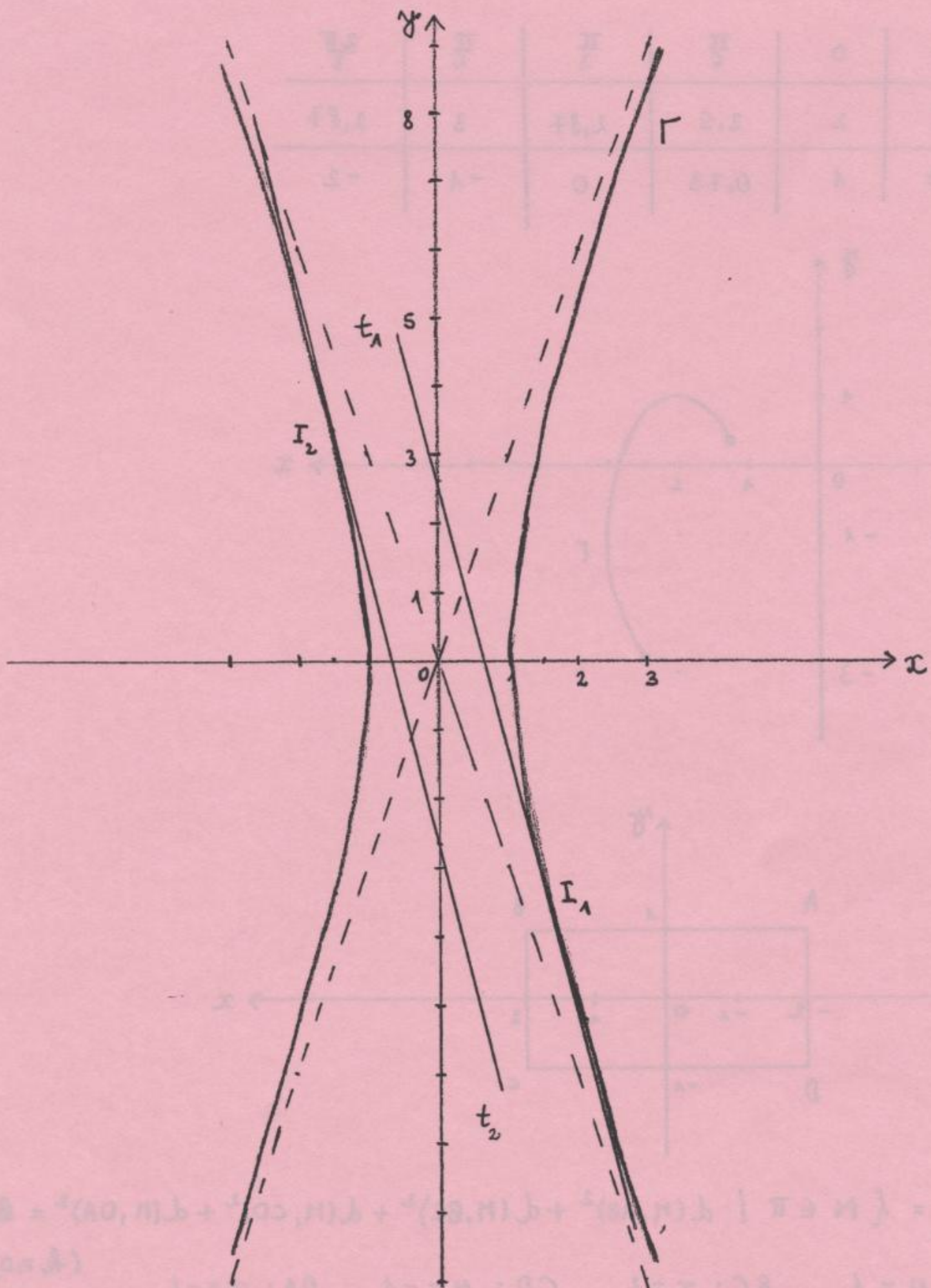
$$I_2\left(\underset{\simeq -1,51}{-\frac{4\sqrt{7}}{7}},\ \underset{\simeq 3,40}{\frac{9\sqrt{7}}{7}}\right)$$

c) Γ : $9x^2-y^2=9 \Leftrightarrow y^2=9x^2-9$

$$\Leftrightarrow y=\pm 3\sqrt{x^2-1}$$

pos : $f(x)=3\sqrt{x^2-1}$ $\quad$ Dom $f =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

x	1	2	3
$f(x)$	0	$3\sqrt{3}$ $\simeq 5,20$	$6\sqrt{2}$ $\simeq 8,49$



IV) 1)

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2 + \sin\theta \\ y = -1 + 2\cos\theta \end{cases}, \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[\iff \begin{cases} x - 2 = \sin\theta \\ \frac{y+1}{2} = \cos\theta \end{cases}, \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[$$

on a : $\sin^2\theta + \cos^2\theta = (x-2)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

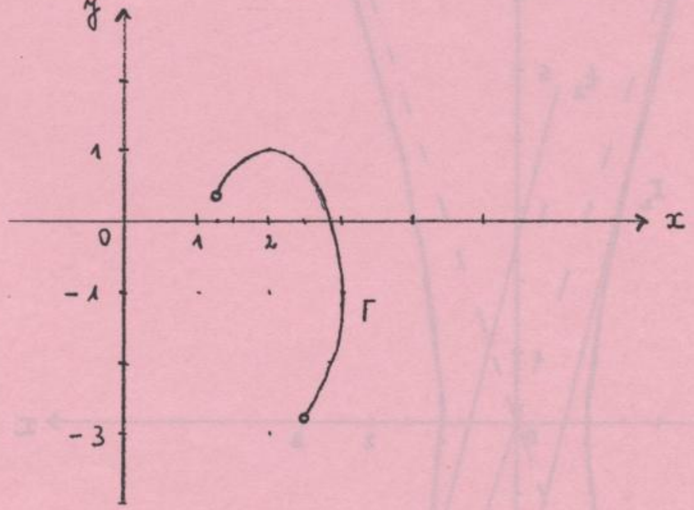
Donc Γ est une partie de l'ellipse $E : (x-2)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

qui a pour centre $\Omega(2,-1)$.

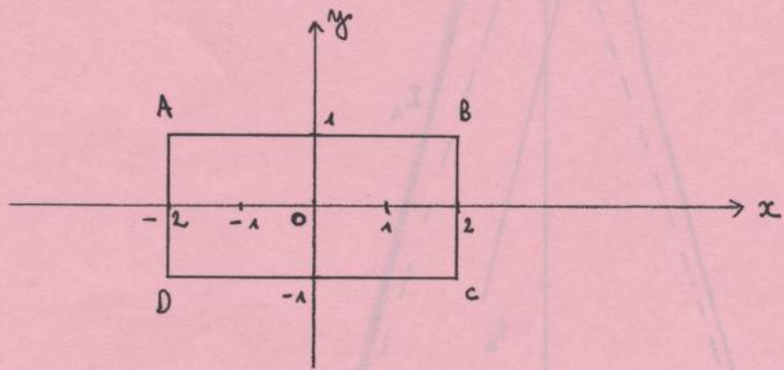
Γ est un arc ouvert de E d'extrémités $A(\underbrace{2-\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\simeq 1,29}, \underbrace{-1+\sqrt{2}}_{\simeq 0,41})$

et $B(2,5 ; \underbrace{-1-\sqrt{3}}_{\simeq -2,73})$

θ	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
x	1,5	2	2,5	2,87	3	2,87
y	0,73	1	0,73	0	-1	-2



2) a)



$$L_k = \{ M \in \Pi \mid d(M,AB)^2 + d(M,BC)^2 + d(M,CD)^2 + d(M,DA)^2 = k \} \quad (k \geq 0)$$

$AB : y = 1 \qquad BC : x = 2 \qquad CD : y = -1 \qquad DA : x = -2$

$$M \in L_k \iff |y-1|^2 + |x-2|^2 + |y+1|^2 + |x+2|^2 = k$$

$$\iff y^2 - \cancel{2y} + 1 + x^2 - \cancel{4x} + 4 + y^2 \cancel{+2y} + 1 + x^2 \cancel{+4x} + 4 = k$$

$$\iff 2x^2 + 2y^2 = k - 10$$

$$\iff x^2 + y^2 = \frac{k-10}{2}$$

Analyse de L_k :

$0 \leq k < 10$: $L_k = \emptyset$

$k = 10$: $L_{10} = \{ O(0,0) \}$

$k > 10$: L_k = cercle de centre O et de rayon $r_k = \sqrt{\frac{k-10}{2}}$

b) L_k passe par les 4 sommets du rectangle $\iff r_k = \overline{OB}$

$\iff {r_k}^2 = \overline{OB}^2 \qquad B(2,1) \Rightarrow \overline{OB}^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

$\iff \frac{k-10}{2} = 5$

$\iff k - 10 = 10$

$\iff k = 20$

L_{20} = cercle $\mathcal{C}(O, \sqrt{5})$