Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2008 Section: B Branche: MATHÉMATIQUES II	Numéro d'ordre du candidat _______ _______

I. On donne la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} a - b^x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

a) Déterminer a et b pour que f soit continu et dérivable en $x = 0$. Donner alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f à l'origine.

b) On prend $a = 1$ et $b = e^{-1}$.

i. Etudier la fonction f [domaine de définition, limites et branches infinies, dérivée, tableau de variation, concavité, équation des tangentes aux points d'inflexion éventuels, courbe représentative].

ii. Soit D la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

α) Calculer l'aire de D.

β) Calculer le volume engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

[15 points]

II. On donne la fonction

$$f : x \longmapsto \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - 2x + 2\right)$$

a) Faire l'étude de f [domaine de définition, limites et branches infinies, dérivée, tableau de variation, concavité, équation des tangentes aux points d'inflexion éventuels, courbe représentative].

b) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = -1$.

[10 points]

III. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $[\ln(\ln x)]^4 - 25\,[\ln(\ln x)]^2 + 144 = 0$

b) $\log_9 x - \dfrac{1}{\log_3 x} \geqslant 1$

c) $2^{1+x} + 3 \cdot 2^{-x} = 7$

[10 points]

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2008

Section: B

Branche: MATHÉMATIQUES II

Numéro d'ordre du candidat

IV. a) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de

$$f: \begin{array}{rcl} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sqrt{1-x^2} \end{array}$$

et l'axe des abscisses.

b) Calculer : $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$. [Suggestion : poser : $x = \dfrac{1}{t}$.]

c) Calculer : $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{1}{x^2+4}dx$ où $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$.
Calculer ensuite : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$.

d) Calculer : $\displaystyle\int_1^2 x2^{-x^2}dx$.

[10 points]

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2008

Section: B

Branche: Mathématiques II

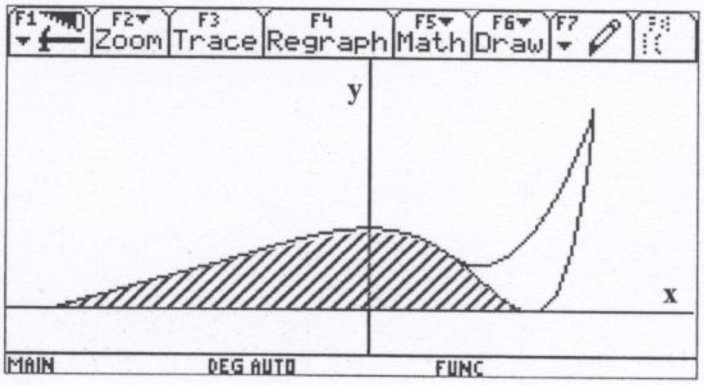
Numéro d'ordre du candidat

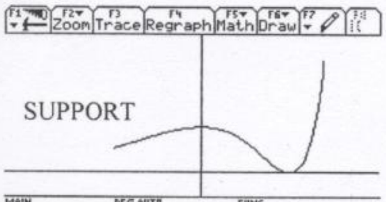
____

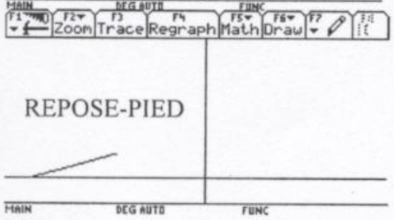
Problème V200 : **« Chaise RELAX »** **(15 points)**

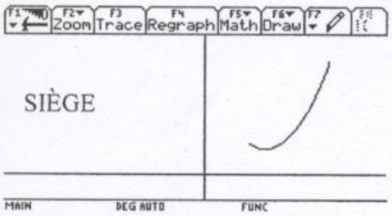
Un producteur de meubles est en train de concevoir une nouvelle génération de chaises « relax ».

Le modèle ci-contre est constitué de trois pièces : un repose-pied, un siège et le support. Chaque partie peut être représentée à l'aide d'une fonction numérique.









Le support peut être représenté à l'aide de la fonction g définie par $g(x)=\frac{1}{4}e^{x}\cdot(x-2)^{2}$.

a) Sachant que le repose-pied représente un morceau de la tangente à la courbe représentative de la fonction g en $x=-2$, établissez l'équation de ce morceau de droite et déterminez les valeurs de x pour lesquelles cette tangente pourra être utilisée comme repose-pied.
Remarque : notons bien que la jonction « support/repose-pied » se fait en $x=-2$.

b) Déterminez l'expression de la fonction s représentant le siège, sachant qu'il faudrait obtenir une fonction polynômiale de degré minimal et que la jointure du siège avec le support se fasse **sans pli** en $x=1$ (*c'est-à-dire les deux courbes ont une tangente commune en ce point*). De plus la fonction s admet un minimum en $x=\frac{e}{2}$.

c) A la fin de la construction, les côtés latéraux des chaises sont enrobés par des tôles métalliques entre le sol (axe des abscisses) et le support/repose-pied (*voir partie hachurée*). Dans la fabrique, une tôle métallique sera découpée à partir d'une pièce métallique rectangulaire. Déterminez les dimensions minimales d'une telle pièce rectangulaire sachant qu'une unité de longueur du repère correspond à 0,25 mètres, puis calculez l'aire d'une tôle métallique !