Corrigé

1. $A\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$

a) $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \pi \iff \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ $\Big\}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x = -3\alpha - \beta + 3 & (1) \\ y = \alpha + 2\beta + 1 & (2) \longleftrightarrow (2) + 2\cdot(1) \\ z = \alpha - 2 & (3) \end{cases}$$

4 $\underline{\text{ép. paramétriques de } \pi}$

$$\iff \begin{cases} x = -3\alpha - \beta + 3 & (1) \\ y + 2x = -5\alpha + 7 & (2) \longleftrightarrow (2) + 5\cdot(3) \\ z = \alpha - 2 & (3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3\alpha - \beta + 3 \\ y + 2x + 5z = -3 \\ z = \alpha - 2 \end{cases}$$

4

D'où, $2x + y + 5z + 3 = 0$ est une <u>ép. cartésienne de π</u>

b) $D\begin{pmatrix}5\\y\\-3\end{pmatrix} \in \pi \iff 10 + y - 15 + 3 = 0$

$\iff y = 2$

1 $D\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix} \in \pi$

c)
$$\begin{cases} -13x - y + z = 6 & (1) \\ 5x - 19y - 2z = -1 & (2) \longleftrightarrow (2) + 2\cdot(1) \\ 3x + 15y + z = 6 & (3) \longleftrightarrow (3) - (1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -13x - y + z = 6 & (1) \\ -21x - 21y = 11 & (2) \longleftrightarrow (2) + \frac{21}{16}\cdot(3) \\ 16x + 16y = 0 & (3) \longleftrightarrow \frac{1}{16}\cdot(3) \end{cases}$$

5

$$\iff \begin{cases} -13x - y + z = 6 \\ 0 = 11 \quad ↯ \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$S = \emptyset$

1 Les ép. du système sont celles de 3 plans qui n'ont aucun pt. commun.

---

2. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+1} > \left(\frac{9}{4}\right)^{3-x}$ $(D = \mathbb{R})$

$\iff \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-2(3-x)}$

$\iff -3x + 1 < -6 + 2x$

4 $\iff -5x < -7$

$\iff x > \frac{7}{5}$ $S = \left]\frac{7}{5}, +\infty\right[$

2.

b) $\ln(x^2-x-2) \leq 2\ln(x-1)$

4

$\Leftrightarrow \ln(x^2-x-2) \leq \ln(x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2-x-2 \leq x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow x \leq 3$

$S =]2;3]$

C.E. 4

1) $x^2-x-2>0$ $\quad \left(\Delta = 1-4\cdot 1\cdot(-2) = 9 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}\right)$

x		-1		2	
x^2-x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$

2) $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

$D =]2;+\infty[$

3\. a) $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

$= \displaystyle\int (-2)\cdot(\underbrace{9-x^2}_{=u(x)})^{-\frac{1}{2}}(\underbrace{-2x}_{=u'(x)})\,dx$

3

$= -2\,\dfrac{(9-x^2)^{1/2}}{1/2} + k \quad (k\in\mathbb{R})$

$= -4\sqrt{9-x^2} + k$

b) $\displaystyle\int (2-x)\,e^{2x+1}\,dx$ $\quad \left\{ \begin{array}{lll} \underline{\text{Ipp.}} & u(x) = 2-x & v'(x) = e^{2x+1}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} \\ & u'(x) = -1 & v(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} \end{array}\right.$

$f(x) \quad f'(x)$

$= (2-x)\cdot\frac{1}{2}e^{2x+1} + \displaystyle\int \frac{1}{2}e^{2x+1}\,dx$

5

$= \left(1-\frac{x}{2}\right)e^{2x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x+1} + k$

$= \left(\frac{5}{4}-\frac{x}{2}\right)e^{2x+1} + k$

4\. $f(x) = 2x\cdot\ln(x+2)$

a). $x\in \text{dom} f \Leftrightarrow x+2>0 \qquad \text{dom} f =]-2;+\infty[$

$\Leftrightarrow x>-2$

1

. $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0$ ou $\ln(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x+2=1$

2

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$

C_f coupe l'axe des abscisses en pts. d'abscisses 0 et -1.

b) F primitive de f sur dom f $\Leftrightarrow$ $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \text{dom } f$

$$F'(x) = \left((x^2-4)\ln(x+2) - \frac{x^2}{2} + 2x \right)'$$

$$= 2x \cdot \ln(x+2) + (x^2-4) \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \cdot 2x + 2$$

5/

$$= 2x \cdot \ln(x+2) + \underbrace{\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} - x + 2}_{=0}$$

$$= f(x)$$

c) $$A = \int_{-1}^{0} -f(x)\, dx$$

$$= \Big[-F(x) \Big]_{-1}^{0}$$

$$= \left[(-x^2+4)\ln(x+2) + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^{0}$$

4/

$$= (4 \ln 2) - \left(3 \cdot 0 + \frac{1}{2} + 2\right)$$

$$= 4 \ln 2 - \frac{5}{2}$$

$$\simeq 0{,}27 \text{ u.a.}$$

d) $t \equiv y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$y = -2 \cdot (x+1) + 0$

4/

$y = -2x - 2$

$f(x) = 2x \cdot \ln(x+2)$

$f'(x) = 2 \cdot \ln(x+2) + 2x \frac{1}{x+2}$

$\quad = 2 \ln(x+2) + \frac{2x}{x+2}$

$f'(-1) = 2 \cdot 0 + \frac{-2}{1} = -2$

$f(-1) = -2 \cdot 0 = 0$

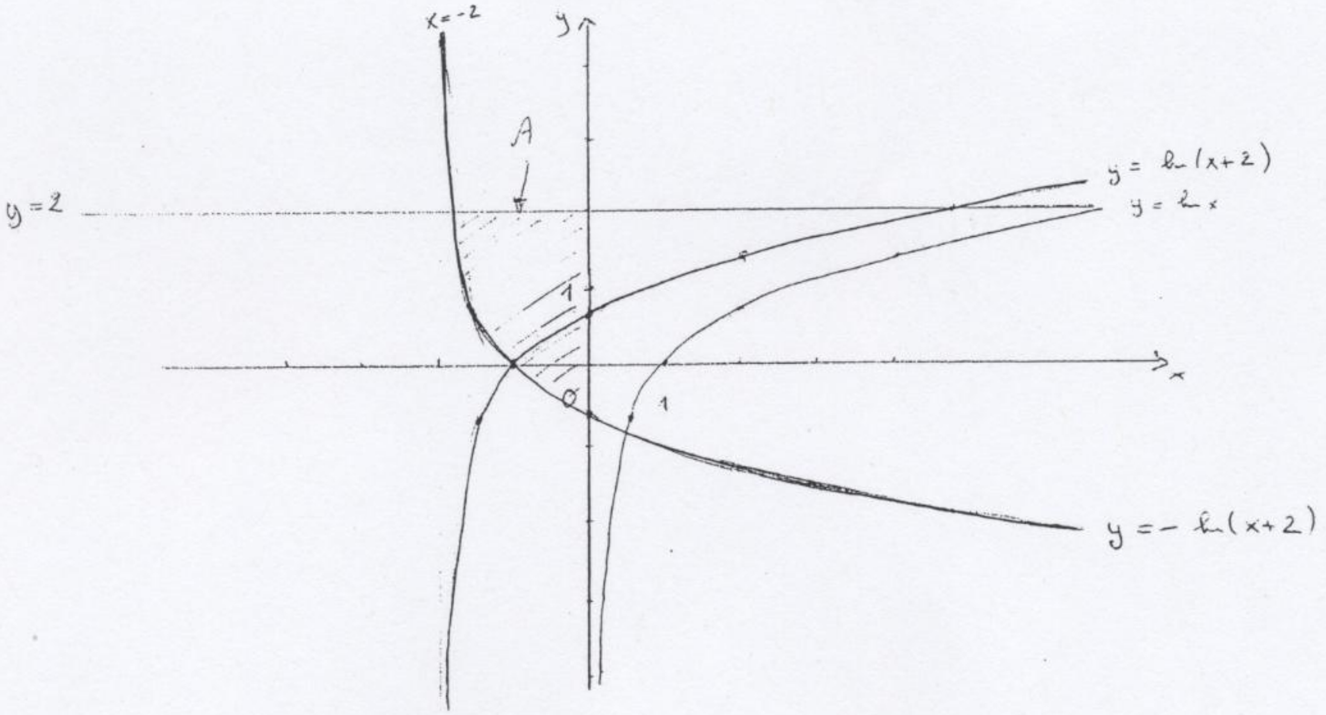
---

5. a) $f(x) = \ln x$

$k(x) = \ln(x+2)$ — translation de 2 unités vers la gauche

$g(x) = -\ln(x+2)$ — symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

4



b) $g(x) = 2 \iff -\ln(x+2) = 2$

$\iff \ln(x+2) = -2$

$\iff x+2 = e^{-2}$

$\iff x = e^{-2} - 2$

3

$$A = \int_{e^{-2}-2}^{0} \left(2 + \ln(x+2) \right) dx$$