Examen de fin d'études secondaires 2008

Section: CD

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

Repêchage Juin

Question 1

Résolvez l'inéquation suivante :

$$\log_2(1-2x) - \log_4 5 \geq \log_4(x^2-4)$$

(5 points)

Question 2

1. Calculez $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} e^{-4x}\cos 2x \, dx$.
2. Calculez $\int_1^e [\ln(ex)]^2 \, dx$ $\rightarrow \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}$
3. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-2x^2+x-9}{x^3-x^2+4x-4}$.
   Déterminez la primitive F de f sur un intervalle I à préciser telle que $F(0) = 2$.

(6+4+4=14 points)

Question 3

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln 2}{x}\right)^x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2^x-1)}{x}$

(3+3=6 points)

Question 4

On donne la fonction f définie par

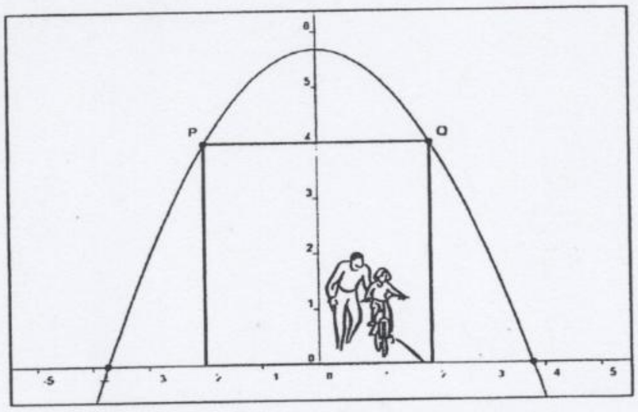
$$f(x) = e^{-x}(2x^2-x-1)$$

1. Déterminez le domaine de définition de f et étudiez le comportement asymptotique de f.
2. Etudiez le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Etudiez l'existence de points d'inflexion.
4. Déterminez l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
5. Représentez graphiquement f dans un repère orthonormé d'unité 2cm. Tracez la tangente $\mathcal{T}$.
6. Calculez l'aire en cm^2 de la partie S du plan délimitée par la courbe C_f et les deux droites d'équations respectives $y=0$ et $x=2$.

(3+4+4+2+3+4=20 points)

Question IV : *(15 points)*

Lors de la planification d'un passage souterrain pour piétons et pour cyclistes, le bureau d'études recommande, pour des raisons de statique, de construire d'abord un tunnel à forme parabolique. Quant au passage pour les cyclistes, il aura une section carrée d'aire 16 m^2 et touchera le tunnel par l'intérieur en deux points.



Le schéma ci-contre montre :

- une section du tunnel de forme parabolique
- une section du passage souterrain de forme carrée
- les deux points de contact P et Q
- la surface inutile comprise entre les deux sections.
  (en gris sur la figure

Le but du problème consiste à trouver la forme optimale du tunnel parabolique pour rendre l'aire de cette surface inutile minimale.

a) La paroi du tunnel sera représentée par une fonction polynôme f telle que : $f(x) = -ax^2 + bx + c$.

- Quel doit-être le signe de a ?
- Déterminez l'expression f(x) en fonction de a.

b) Calculez l'aire A_t de la surface comprise entre la paroi du tunnel et le sol en fonction de a.

c) Calculez ensuite l'aire de la surface inutile comprise entre le tunnel parabolique et le passage carré et montrez qu'on peut la représenter par une fonction s définie par :

$$s(a) = \frac{32\cdot}{3}\cdot\sqrt{\frac{(a+1)^3}{a}} - 16.$$

d) Déterminez la valeur de a, pour laquelle cette aire sera minimale .

e) Donnez finalement l'expression algébrique de la fonction f représentant la section optimale du tunnel et précisez le pourcentage que l'aire de la surface inutile représentera par rapport à l'aire totale de la surface comprise entre le tunnel et le sol.