Corrigé

Question I

(11) 1) $P(z) = z^3 + \alpha z^2 - 3z + \beta \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(8) a) $P(-i) = 0 \Leftrightarrow (-i)^3 + \alpha(-i)^2 - 3(-i) + \beta = 0 \Leftrightarrow i - \alpha + 3i + \beta = 0$

(1) $\qquad \Leftrightarrow -\alpha + \beta = -4i$

$P(1+i) = 1-8i \Leftrightarrow (1+i)^3 + \alpha(1+i)^2 - 3(1+i) + \beta = 1-8i$

$\Leftrightarrow -2 + 2i + 2i\cdot\alpha - 3 - 3i + \beta = 1 - 8i$

(2) $\qquad \Leftrightarrow 2i\,\alpha + \beta = 6 - 7i$

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = -4i & (1) \\ 2i\,\alpha + \beta = 6 - 7i & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow -\alpha(1+2i) = -6+3i$

$\alpha = \dfrac{6-3i}{1+2i} \cdot \dfrac{1-2i}{1-2i}$

$\underline{\alpha = \dfrac{-15i}{5} = -3i}$

(2) $(1) \Rightarrow \beta = -4i - 3i = \underline{-7i}$

$P(z) = z^3 - 3iz^2 - 3z - 7i$

$P(z)$ est divisible par $z+i$:

(1)

	1	$-3i$	-3	$-7i$
$-i$		$-i$	-4	$7i$
	1	$-4i$	-7	0

$P(z) = (z+i)\cdot(z^2 - 4iz - 7)$

$z^2 - 4iz - 7 = 0$

$\Delta = -16 + 28 = 12$

$z_i = \dfrac{4i \pm 2\sqrt{3}}{2} = \pm\sqrt{3} + 2i$

(2) $\Rightarrow P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -i$ ou $z = \sqrt{3} + 2i$ ou $z = -\sqrt{3} + 2i$

$S = \{-i \,;\, \sqrt{3} + 2i \,;\, -\sqrt{3} + 2i\}$

(3) b) Soit $A(-i)$; $B(\sqrt{3} + 2i)$; $C(-\sqrt{3} + 2i)$

ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{AC}$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \text{cis}\,\dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-\sqrt{3} + 2i + i}{\sqrt{3} + 2i + i} = \dfrac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} \cdot \dfrac{\sqrt{3} - 3i}{\sqrt{3} - 3i} = \dfrac{6 + 6\sqrt{3}\,i}{12} = \dfrac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}$

$= \text{cis}\,\dfrac{\pi}{3}$

(4) 2) a) $z = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left[(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1) \right]$

$z^2 = \frac{1}{8} \cdot \left[(4+2\sqrt{3}) + 2i \cdot 2 - (4-2\sqrt{3}) \right]$

$= \frac{1}{8} \cdot (4\sqrt{3} + 4i)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$z^2 = \text{cis}\,\frac{\pi}{6}$

b) z est une des 2 racines carrées de $z^2 = \text{cis}\,\frac{\pi}{6}$

Les racines carrées de $\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$ sont $z_k = \text{cis}\left(\frac{\pi}{12} + k\pi\right)$ $k \in \{0;1\}$

$z_0 = \text{cis}\,\frac{\pi}{12}$

$z_1 = \text{cis}\,\frac{13\pi}{12}$.

$\Rightarrow z = z_0$ car $\mathcal{R}(z) > 0$ et $\mathcal{I}(z) > 0$

$z = \text{cis}\,\frac{\pi}{12}$

<u>Question II</u>

(9) 1) a) 4 blanches et $N-4$ noires

(3) Le tirage de 1 boule correspond à une épreuve de Bernoulli avec succès : tirer une boule blanche

$p = \frac{4}{N}$ et $1-p = 1-\frac{4}{N} = \frac{N-4}{4}$

Les 5 tirages successifs d'une boule avec remise correspondent à un schéma de Bernoulli de paramètres :

$p = \frac{4}{N}$ et $n = 5$

La loi de probabilité de X : nombre de boules blanches tirées est donc une loi binomiale.

$\Rightarrow P(X = k) = C_5^k \left(\frac{4}{N}\right)^k \left(\frac{N-4}{N}\right)^{5-k}$

$k \in \{0; 1; \ldots 5\}$

b) tirer 4 boules noires équivaut à tirer une boule blanche.

(4)

$\Rightarrow P(X=3) = 8 \cdot P(X=1)$

$\Leftrightarrow C_5^3 \left(\frac{4}{N}\right)^3 \cdot \left(\frac{N-4}{N}\right)^2 = 8 \cdot C_5^1 \left(\frac{4}{N}\right)^1 \cdot \left(\frac{N-4}{N}\right)^4$

$$\Leftrightarrow \frac{10 \cdot 64 \cdot (N-4)^2}{N^5} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 4\,(N-4)^4}{N^5}$$

$$\Leftrightarrow 4(N-4)^2 = (N-4)^4$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(N-4)^2}_{\neq 0} \cdot \left[4 - (N-4)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (N-4)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow N-4 = 2 \quad \text{ou} \quad N-4 = -2$$

$$\boxed{N = 6} \quad \text{ou} \quad N = 2 \ \text{à rejeter } (N>4)$$

c) (2) Si $N = 6$, $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow E(X) = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$V(X) = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{9}$$

---

3 2) (1) a) $A_{10}^3 - A_9^2 = \underline{648}$ ou $9 \cdot 9 \cdot 8$

(2) b) si le dernier chiffre est 0 : $9 \cdot 8 \cdot 1$

si le dernier chiffre est 2, 4, 6 ou 8 : $8 \cdot 8 \cdot 4$

$$\Rightarrow 9 \cdot 8 + 8 \cdot 8 \cdot 4 = \underline{328}$$

---

3 3) $$\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} C_9^k (-1)^k (3x^2)^{9-k} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{9} C_9^k (-1)^k \cdot 3^{9-k} \cdot 2^{-k} \cdot x^{2(9-k)-k}$$

$$2(9-k)-k = 0 \Leftrightarrow 18 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

$\Rightarrow$ le terme indépendant de x est :

$$C_9^6 (-1)^6 \cdot 3^3 \cdot 2^{-6} = \frac{567}{16}$$

Question III

④ 1) $M(x;y) \in L \Leftrightarrow \overline{OM} = \frac{2}{3} d(M;S) \Leftrightarrow \overline{OM}^2 = \frac{4}{9} d^2(M;S)$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{5}{2}-x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+9y^2 = 4\left(\frac{25}{4}-5x+x^2\right)$$

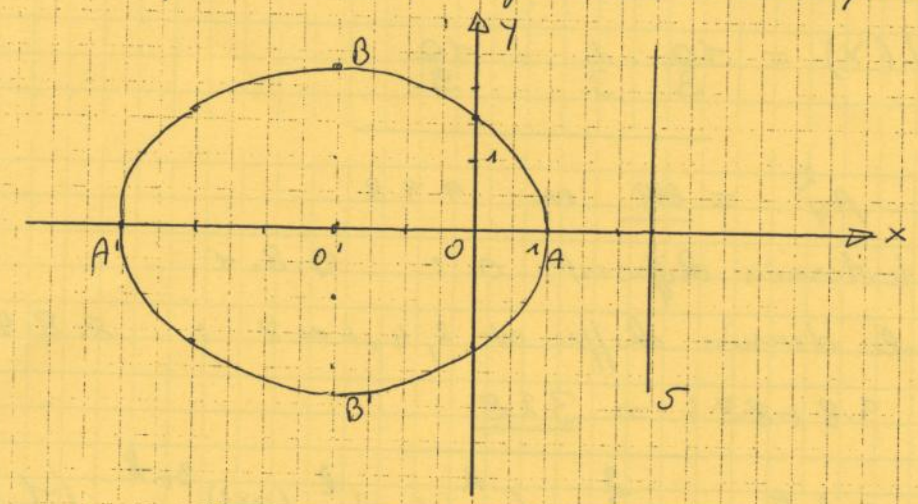
$$\Leftrightarrow 9x^2+9y^2-25+20x-4x^2=0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+20x+9y^2=25$$

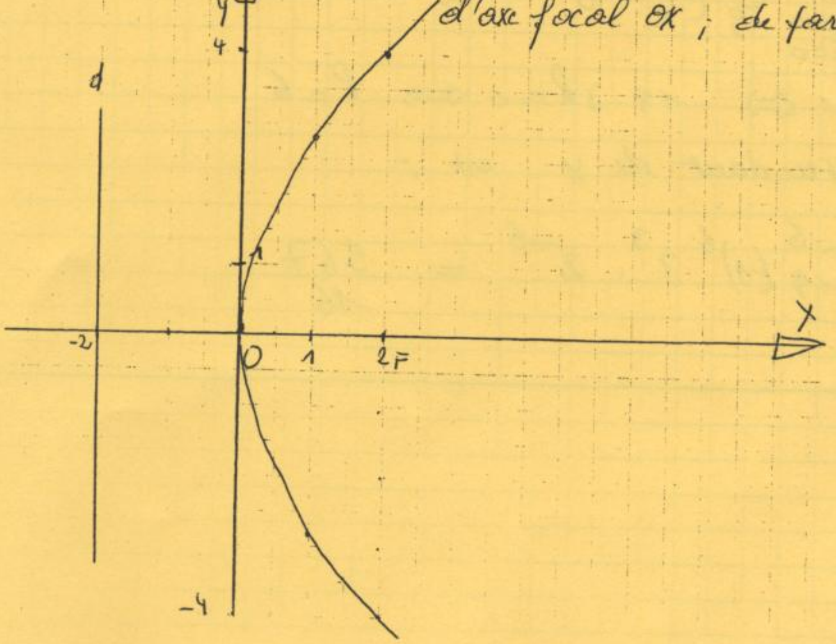
$$\Leftrightarrow 5(x+2)^2+9y^2=45$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

La courbe est une ellipse de centre $O'(-2;0)$ d'axe focal Ox ; de grand axe 6 et de petit axe $2\sqrt{5}$



⑪ 2) a) (2) $y^2 = 8x$ est l'équation d'une parabole de sommet $O(0;0)$ d'axe focal Ox ; de paramètre 4 ; de foyer $F(2;0)$ de directrice $d \equiv x=-2$



b) Soit $M(-2;c)$ un point de la directrice.

(9) Une tangente à C issue de M ne pouvant pas être ni verticale, ni horizontale ; soit $y = ax+b$ l'équation d'une tangente t cherchée. $(a \neq 0)$

$M(-2;c) \in t \Rightarrow c = -2a+b \Rightarrow b = c+2a$

$\Rightarrow t = y = ax + (c+2a)$

$t \cap C : \begin{cases} y = ax+(c+2a) & (1) \\ y^2 = 8x & (2) \end{cases}$

$(2) \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{8}$

$(1) \Rightarrow y = a\dfrac{y^2}{8} + c+2a$

$ay^2 - 8y + 8.(c+2a) = 0 \quad (3) \quad (a \neq 0)$

t est tangente à C ssi l'équation (3) admet une solution double.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 64 - 32a(c+2a) = 0$

$\Leftrightarrow 64 - 32ac - 64a^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 + ac - 2 = 0$

$\Delta = c^2 + 16 > 0$

$a_i = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2+16}}{4} \quad a_1 = \dfrac{-c+\sqrt{c^2+16}}{4} \quad a_2 = \dfrac{-c-\sqrt{c^2+16}}{4}$

Il y a 2 tangentes à C issues de M :

$t_1 : y = \dfrac{-c+\sqrt{c^2+16}}{4}x + c + \dfrac{-c+\sqrt{c^2+16}}{2}$

$t_2 : y = \dfrac{-c-\sqrt{c^2+16}}{4}x + c + \dfrac{-c-\sqrt{c^2+16}}{2}$

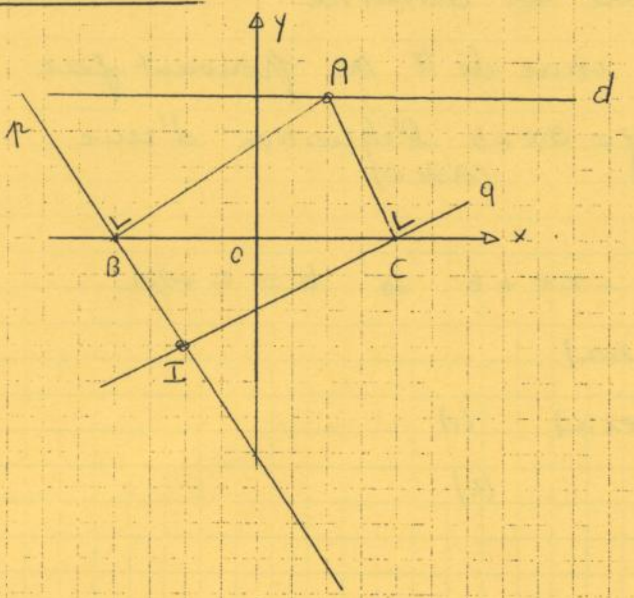
$a_1 . a_2 = \dfrac{(-c+\sqrt{c^2+16}).(-c-\sqrt{c^2+16})}{16}$

$= \dfrac{c^2-(c^2+16)}{16} = -1$

$\Rightarrow t_1 \perp t_2$

Question IV

a) (10)



on choisit un repère orthonormé d'origine $O =$ mil $[BC]$

et tel que $C(a\,;\,0)$

$B(-a\,;\,0)$

$d \equiv y = b$

$\Rightarrow A(\lambda\,;\,b)\ \lambda \in \mathbb{R}$

Equation de p : $M(x;y) \in p \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+a \\ y \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} \lambda+a \\ b \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow (x+a)\cdot(\lambda+a) + by = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda+a)x + by + (\lambda+a)a = 0$

équation de q : $M(x,y) \in q \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} \lambda-a \\ b \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow (\lambda-a)(x-a) + by = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda-a)x + by - a(\lambda-a) = 0$

$$\begin{cases} (\lambda+a)x + by + (\lambda+a)a = 0 & (1) \\ (\lambda-a)x + by - a(\lambda-a) = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow 2ax + 2a\lambda = 0.$

$\Leftrightarrow x + \lambda = 0.$

$\Leftrightarrow \lambda = -x$

$\lambda = -x$ dans $(1) \Rightarrow (a-x)x + by + (a-x)a = 0$

$(a-x)(x+a) + by = 0$

$\underline{a^2 - x^2 + by = 0.}$

est l'équation cartésienne du lieu

b) $a^2 - x^2 + by = 0 \Leftrightarrow x^2 = by + a^2$

(3) $\Leftrightarrow x^2 = b\left(y + \frac{a^2}{b}\right)$

changement de repère : $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \frac{a^2}{b} \end{cases}$ $O'\left(0 ; -\frac{a^2}{b}\right)$

dans le nouveau repère $\Rightarrow x'^2 = b y'$.

parabole de sommet O', d'axe $O'y$

de paramètre $\frac{b}{2}$; de foyer $F\left(0 ; \frac{b}{4}\right)$

de directrice $\delta \equiv y = -\frac{b}{4}$

Le lieu est donc une parabole

de sommet $O'\left(0 ; -\frac{a^2}{b}\right)$

d'axe focal Oy

de foyer $F\left(0 ; \frac{b^2 - 4a^2}{4b}\right)$

de directrice $\delta \equiv y = -\frac{b^2 + 4a^2}{4b}$

c) si $a = b = 2$, l'équation de la parabole est $x^2 = 2 \cdot (y + 2)$

(2) de sommet $O'(0 ; -2)$