

Question 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

1. - Domaines

f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions qui le sont.

- limites et asymptotes

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ pour $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 0$$

donc C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x$ pour $x \rightarrow +\infty$.

- dérivée et signe

$$\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$$

$$\text{sign}(f'(x)) = \text{sign}(2e^x - 1)$$

$$2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\ln 2$$

- dérivée seconde

$$f'(x) = \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{u}{v}$$

$$v^2 f''(x) = -e^x(e^{2x} - 4e^x + 1)$$

$$\text{sign}(f''(x)) = \text{sign}(-e^{2x} + 4e^x - 1)$$

$$\text{Ainsi } f''(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < 2 - \sqrt{3} < e^x < 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \ln(2 - \sqrt{3}) < x < \ln(2 + \sqrt{3})$$

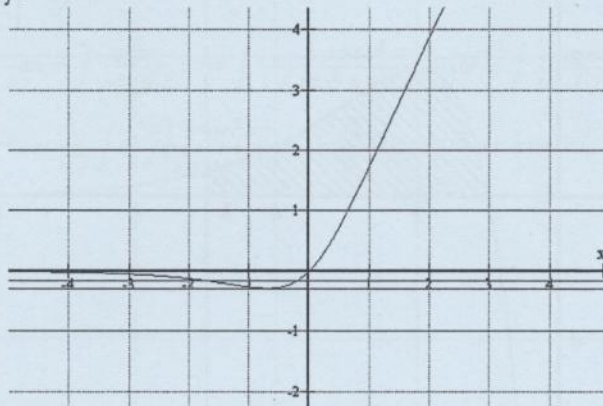
- concavité

Par conséquent la courbe est convexe (concave vers le haut) pour $x \in \mathbb{R} \setminus [\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3})]$ et concave (vers le bas) pour $x \in [\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3})]$

- tableau de variation et points d'inflexion

x	$-\infty$	$\ln(2 - \sqrt{3})$	$-\ln 2$	$\ln(2 + \sqrt{3})$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	-	0	+	+	
$f''(x)$	-	0	+	+	0	-
$f(x)$	0	\searrow	<i>min</i>	\nearrow	$+\infty$	
$f(x)$	<i>concave</i>	<i>I</i>	<i>convexe</i>	<i>convexe</i>	<i>J</i>	<i>concave</i>

Les points d'inflexion $I(\ln(2 - \sqrt{3}), f(\ln(2 - \sqrt{3})) \approx (-1, 3; -0, 2)$ et $J(\ln(2 + \sqrt{3}), f(\ln(2 + \sqrt{3})) \approx (1, 3; 2, 4)$

2. Représentation graphique C_f .

3.

$$f(x) = m \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - e^x + 1) = m \Leftrightarrow e^{2x} - e^x + 1 = e^m e^{2x} - e^x + 1 - e^m = 0$$

Posons $e^x = y$ $\Delta = 4e^m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \ln \frac{3}{4}$ et soient α et β les racines du trinôme $y^2 - y + 1 - e^m$ si elles existent. $\alpha\beta = 1 - e^m$ et $\alpha + \beta = 1$

m	Δ	$\alpha\beta$	$\alpha + \beta$	solutions
$] -\infty, \ln \frac{3}{4}[$	< 0			0
	$= 0$			1 solution $x = -\ln 2$
$] \ln \frac{3}{4}, 0[$	> 0	> 0	> 0	2 solutions
0	> 0	0	> 0	1 solution $x = 0$
$] 0, +\infty[$	> 0	< 0	> 0	1 solution

12+2+5=19 points

Question 2

1. - Domaines

f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions qui le sont.

- limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5(x-1)e^{1-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5(x-1)e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \frac{(x-1)e^x}{e^{x-1}} \stackrel{\mathcal{H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

- dérivée

$$f'(x) = 5(2-x)e^{1-x}$$

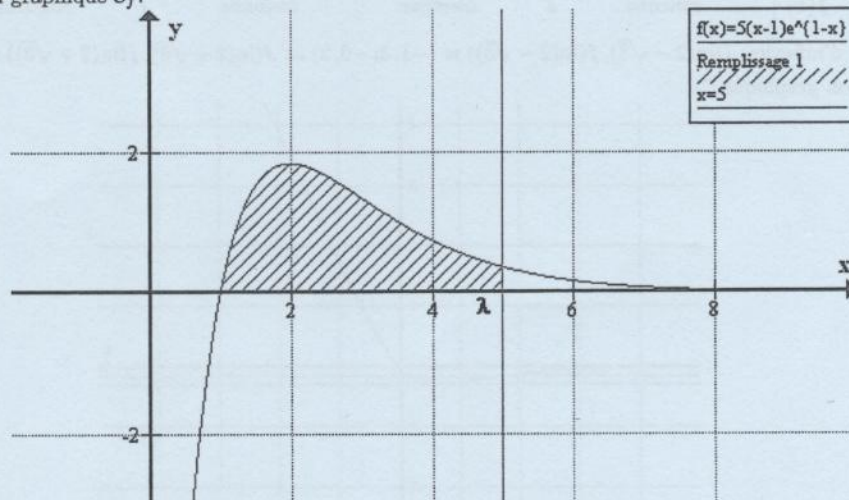
$$\text{sign}(f'(x)) = \text{sign}(2-x)$$

- intersection avec l'axe des x

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

- tableau de variation

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 0	\nearrow max	\searrow 0

2. Représentation graphique C_f .

$$3. A(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx = \int_1^\lambda 5(x-1)e^{1-x} dx$$

une primitive

$$F(x) = \int (x-1)e^{1-x} dx = -(x-1)e^{1-x} - \int -e^{1-x} dx = -(x-1)e^{1-x} - e^{1-x} = -xe^{1-x}$$

Donc

$$A(\lambda) = 5F(\lambda) - 5F(1) = 5 - 5\lambda e^{1-\lambda}$$

$$4. \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (5 - 5\lambda e^{1-\lambda}) = 5 - 5 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{e^{\lambda-1}} \stackrel{H\ddot{H}}{=} 5 - 5 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\lambda-1}} = 5$$

$$5. \mathcal{V}(\lambda) = \pi \int_1^\lambda (f(x))^2 dx = 25\pi \int_1^\lambda (x-1)^2 e^{2(1-x)} dx$$

une primitive

$$G(x) = \int (x-1)^2 e^{2(1-x)} dx = -\frac{1}{2}(x-1)^2 e^{2(1-x)} - \int -(x-1)e^{2(1-x)} dx = -\frac{1}{2}(x-1)^2 e^{2(1-x)} - \frac{1}{2}(x-1)e^{2(1-x)} - \int -\frac{1}{2}e^{2(1-x)} dx = -\frac{1}{2}(x-1)^2 e^{2(1-x)} - \frac{1}{2}(x-1)e^{2(1-x)} - \frac{1}{4}e^{2(1-x)} = -\frac{1}{4}e^{2(1-x)}[2(x-1)^2 + 2(x-1) + 1] = -\frac{1}{4}e^{2(1-x)}(2x^2 - 2x + 1)$$

Donc

$$\mathcal{V}(\lambda) = \pi \int_1^\lambda (f(x))^2 dx = 25\pi[G(\lambda) - G(1)] = 25\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2(1-\lambda)}(2\lambda^2 - 2\lambda + 1)\right)$$

$$6. \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\lambda) \stackrel{H\ddot{H}}{=} \frac{25\pi}{4}.$$

6+1+3+1+3+1=15 points

Question 3

1.

$$\int_0^4 \frac{(x-1)^3}{x^2+x+1} dx = 3 \int_0^4 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \int_0^4 x-4 dx = [3 \ln(x^2+x+1) + x^2 - 4x]_0^4 = 3 \ln 21 - 8$$

2.

$$\int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha$$

Pour $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ poser $x = \sin \alpha$ avec $0 = \sin \alpha \Leftrightarrow \alpha = \arcsin 0 = 0$ et $1 = \sin \alpha \Leftrightarrow \alpha = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

$dx = \cos \alpha d\alpha$ et $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 \alpha} = |\cos \alpha| = \cos \alpha$

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} d\alpha = 4 \left[-\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \left[-\frac{1}{4} \sin \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right] = \pi$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int -e^x \sin x dx \right) = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \Leftrightarrow 2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + k$$

4. $\forall x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan^2 x + \tan^2 x} dx = \int \frac{1+\tan^2 x}{1+(\sqrt{2}\tan x)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}(1+\tan^2 x)}{1+(\sqrt{2}\tan x)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + k \end{aligned}$$

2+3+3+3=11 points

V. $f : t \mapsto a(e^{-bt} - e^{-t}) \quad (a, b \in \mathbb{R}_0^+)$

a) i. On a bien : $f(0) = 0$.

ii. On a : $(\forall t \in \text{dom } f) \quad f'(t) = a(e^{bt} - be^t)e^{(-b-1)t}$

$f'(2 \ln 2) = 0 \iff a = 0$ ou $b = \frac{1}{2}$ ou $b = 1$.

La solution $a = 0$ n'est pas acceptable, car $a > 0$ (et donnerait $f : x \mapsto 0$).

La solution $b = 1$ n'est pas acceptable, car, dans ce cas, f serait la fonction nulle.

Donc $b = \frac{1}{2}$.

On a : $f'(2 \ln 2) = 0$; $f'(1) > 0$ et $f'(2) < 0$.

Comme f' est continu, f' admet bien un maximum pour $t = 2 \ln 2$.

Prenons $b = \frac{1}{2}$.

iii. On a : $f(2 \ln 2) = \frac{5}{2} \iff a = 10$.

La fonction cherchée est donc $f : t \mapsto 10(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t})$.

b) Posons : $g : t \mapsto 11(e^{-bt} - e^{-t})$

On a : $g(6) = 2 \iff b = b_0 \approx 0,28187$

et, en prenant $b = b_0$, on obtient : $g'(t) = 0 \iff t = t_0 \approx 1,763$.

A l'instant t_0 la concentration est maximale et vaut environ 4,806 ml/l.

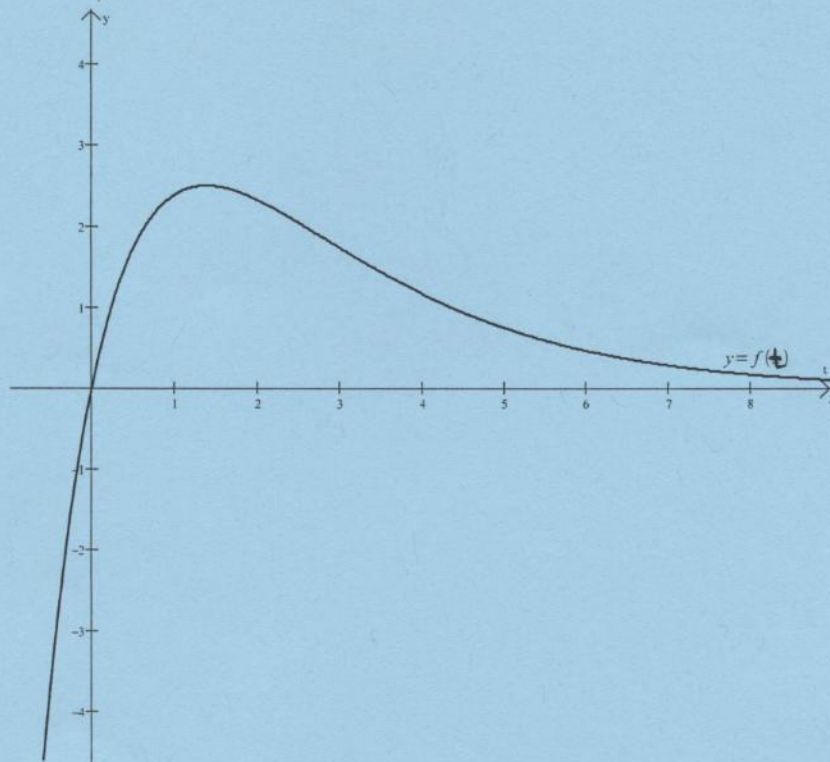
c) i. $f : t \mapsto 10(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t})$

dom f = \mathbb{R} , on réduit l'étude à \mathbb{R}_+ puisque le temps t est ≥ 0 .

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad f'(t) = -5e^{-t}(e^{\frac{t}{2}} - 2)$

t	0	$2 \ln 2$	$+\infty$
$f'(\frac{t}{2})$		$+$	$-$
$f(t)$		\nearrow	\searrow
		$\frac{5}{2}$ max	0



ii. La concentration est de 75% de la valeur maximale quand elle est égale à $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$

$$f(t) = \frac{15}{8} \iff t = t_1 \approx 0,575 \text{ ou } t = t_2 \approx 2,773.$$

L'instant t_1 n'est pas la solution cherchée, car la concentration y est en augmentation ($f'(t_1) > 0$).

A l'instant t_2 la concentration est de $\frac{15}{8}$ et est décroissante. C'est donc l'instant cherché.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgnIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> a · (e^{-b · t} - e^{-t}) → f(a, b, t) Done f(a, b, 0) 0 $\frac{d}{dt}(f(a, b, t)) \rightarrow dif(t)$ Done dif(t) a · (e^{b · t} - b · e^t) · e^{(-b - 1) · t} solve(dif(2 · ln(2)) = 0, b) b = .5 or b = 1. or a = 0 					
MAIN RAD AUTO FUNC 6/99					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgnIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> 1/2 → b dif(1) .064614111315 · a dif(2) -.048604437349 · a solve(f(a, b, 2 · ln(2)) = 5/2, a) a = 10 11 → a 11 DelVar b Done solve(f(11, b, 6) = 2, b) b = .281867841732 					
MAIN RAD AUTO FUNC 13/99					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgnIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> b = .281867841732 .28186784173208 → b .281867841732 solve(dif(t) = 0, t) t = 1.76334808246 f(11, b, 1.7633480824581) 4.89550671262 10 · (e^{-1/2 · t} - e^{-t}) → f(t) Done lim f(t) t → -∞ -∞ 					
MAIN RAD AUTO FUNC 18/99					

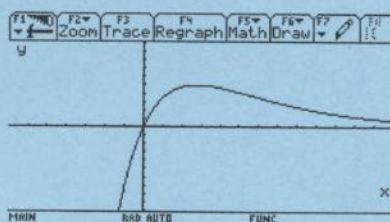
F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgnIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> lim f(t) t → ∞ 0 $\frac{d}{dt}(f(t)) -5 \cdot e^{-t} \cdot \left(\frac{t}{2} - 2\right)$ solve($e^{\frac{t}{2}} - 2 = 0, t$) t = 2 · ln(2) 					
MAIN RAD AUTO FUNC 22/99					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgnIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> solve($e^{\frac{t}{2}} - 2 = 0, t$) t = 2 · ln(2) solve($e^{\frac{t}{2}} - 2 > 0, t$) t > 2 · ln(2) f(2 · ln(2)) 5/2 $\frac{3/4 \cdot 5}{2}$ 15/8 					
MAIN RAD AUTO FUNC 25/99					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgnIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> solve($e^{\frac{t}{2}} - 2 = 0, t$) t = 2 · ln(2) solve($e^{\frac{t}{2}} - 2 > 0, t$) t > 2 · ln(2) f(2 · ln(2)) 5/2 $\frac{3/4 \cdot 5}{2}$ 15/8 solve(f(t) = 15/8, t) t = .575364144904 or t = 2.77258872224 					
MAIN RAD AUTO FUNC 26/99					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Fit-ndec	Del	Pow	Imp
X	Y1				
-1	-10.7				
-1.5	-3.647				
0	0				
.5	1.7227				
1	2.3865				
1.5	2.4924				
2	2.3254				
2.5	2.0442				
x = 2.5					
MAIN RAD AUTO FUNC					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Fit-ndec	Del	Pow	Imp
X	Y1				
3	1.7334				
3.5	1.4358				
4	1.1782				
4.5	.9429				
5	.75347				
5.5	.59841				
6	.47398				
6.5	.37271				
x = 6.5					
MAIN RAD AUTO FUNC					



[15 points]