Question 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$

1. – Domaines

   f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont.

   – limites et asymptotes

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ pour $x \to -\infty$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x} = 2$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 0$

   donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x$ pour $x \to +\infty$.

   – dérivée et signe

   $\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = \dfrac{e^{x}(2e^{x} - 1)}{e^{2x} - e^{x} + 1}$

   $sign(f'(x)) = sign(2e^{x} - 1)$

   $2e^{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\ln 2$

   – dérivée seconde

   $f'(x) = \dfrac{e^{x}(2e^{x} - 1)}{e^{2x} - e^{x} + 1} = \dfrac{u}{v}$

   $v^2 f''(x) = -e^{x}(e^{2x} - 4e^{x} + 1)$

   $sign(f''(x)) = sign(-e^{2x} + 4e^{x} - 1)$

   Ainsi $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < 2 - \sqrt{3} < e^{x} < 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow) < x < \ln(2 + \sqrt{3})$

   – concavité

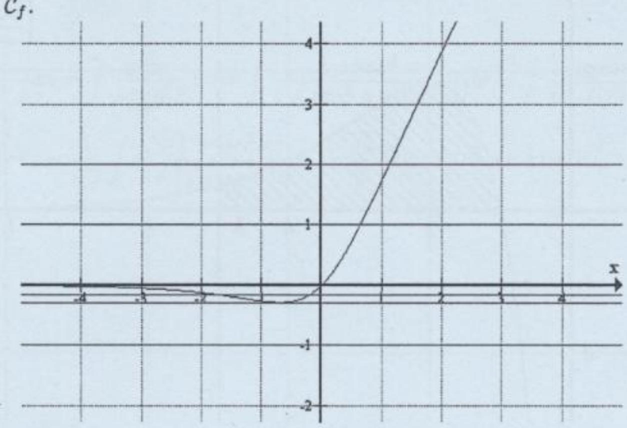
   Par conséquent la courbe est convexe (concave vers le haut) pour $x \in \mathbb{R}\backslash[\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3})]$ et concave (vers le bas) pour $x \in [\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3})]$

   – tableau de variation et points d'inflexion

x	$-\infty$		$\ln(2-\sqrt{3})$		$-\ln 2$		$\ln(2-\sqrt{3})$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0		$\searrow$		*min*		$\nearrow$		$+\infty$
$f(x)$		*concave*	I	*convexe*		*convexe*	J	*concave*	

   Les points d'inflexion $I(\ln(2 - \sqrt{3}), f(\ln(2 - \sqrt{3})) \approx (-1,3; -0,2)$ et $J(\ln(2 + \sqrt{3}), f(\ln(2 + \sqrt{3})) \approx (1,3; 2,4)$

2. Représentation graphique $\mathcal{C}_f$.



3.

$$f(x) = m \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - e^x + 1) = m \Leftrightarrow e^{2x} - e^x + 1 = e^m e^{2x} - e^x + 1 - e^m = 0$$

Posons $e^x = y$ $\Delta = 4e^m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \ln\frac{3}{4}$ et soient α et β les racines du trinôme $y^2 - y + 1 - e^m$ si elles existent.
$\alpha\beta = 1 - e^m$ et $\alpha + \beta = 1$

m	Δ	$\alpha\beta$	$\alpha+\beta$	*solutions*
$]-\infty, \ln\frac{3}{4}[$	<0			0
	$=0$			1 solution $x = -\ln 2$
$]\ln\frac{3}{4}, 0[$	>0	>0	>0	2 solutions
0	>0	0	>0	1 solution $x = 0$
$]0, +\infty[$	>0	<0	>0	1 solution

12+2+5=19 points

Question 2

1. – Domaines
   f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont.

   – limites
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 5(x-1)e^{1-x} = -\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5(x-1)e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 5\frac{(x-1)}{e^{x-1}} \overset{\mathcal{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} 5\frac{1}{e^{x-1}} = 0$

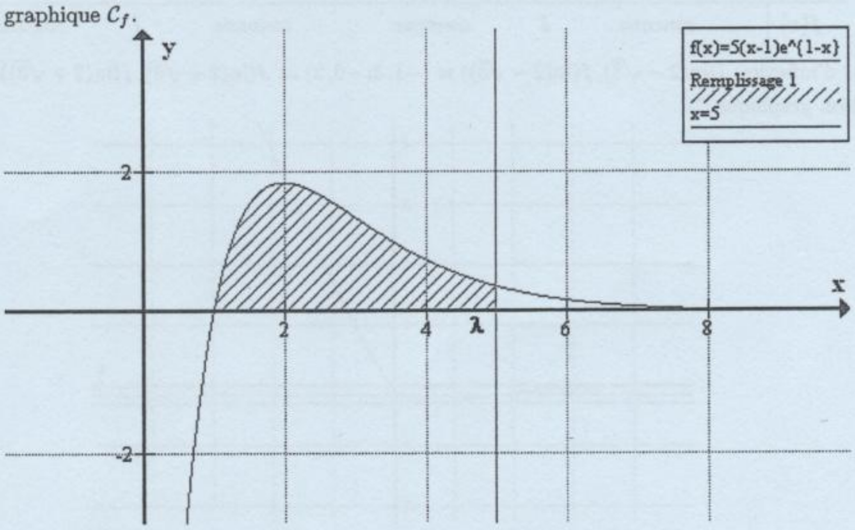
   – dérivée
   $f'(x) = 5(2-x)e^{1-x}$
   $sign(f'(x)) = sign(2-x)$

   – intersection avec l'axe des x
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

   – tableau de variation

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	*max*	$\searrow$	0

2. Représentation graphique C_f.



3. $\mathcal{A}(\lambda)=\int_1^\lambda f(x)dx=\int_1^\lambda 5(x-1)e^{1-x}dx$
une primitive
$F(x)=\int(x-1)e^{1-x}dx=-(x-1)e^{1-x}-\int -e^{1-x}dx=-(x-1)e^{1-x}-e^{1-x}=-xe^{1-x}$
Donc
$\mathcal{A}(\lambda)=5F(\lambda)-5F(1)=5-5\lambda e^{1-\lambda}$

4. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(5-5\lambda e^{1-\lambda})=5-5\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda}{e^{\lambda-1}}\overset{\mathcal{H}}{=}5-5\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{e^{\lambda-1}}=5$

5. $\mathcal{V}(\lambda)=\pi\int_1^\lambda(f(x))^2dx=25\pi\int_1^\lambda(x-1)^2e^{2(1-x)}dx$
une primitive
$G(x)=\int(x-1)^2e^{2(1-x)}dx=-\frac{1}{2}(x-1)^2e^{2(1-x)}-\int-(x-1)e^{2(1-x)}dx=-\frac{1}{2}(x-1)^2e^{2(1-x)}-\frac{1}{2}(x-1)e^{2(1-x)}-\int-\frac{1}{2}e^{2(1-x)}dx=-\frac{1}{2}(x-1)^2e^{2(1-x)}-\frac{1}{2}(x-1)e^{2(1-x)}-\frac{1}{4}e^{2(1-x)}=-\frac{1}{4}e^{2(1-x)}[2(x-1)^2+2(x-1)+1]=-\frac{1}{4}e^{2(1-x)}(2x^2-2x+1)$
Donc
$\mathcal{V}(\lambda)=\pi\int_1^\lambda(f(x))^2dx=25\pi[G(\lambda)-G(1)]=25\pi(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{2(1-\lambda)}(2\lambda^2-2\lambda+1))$

6. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{V}(\lambda)\overset{\mathcal{HH}}{=\!=}\dfrac{25\pi}{4}.$

6+1+3+1+3+1=15 points

Question 3

1.
$$\int_0^4\frac{(x-1)^3}{x^2+x+1}dx=3\int_0^4\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\int_0^4 x-4dx=\left[3\ln(x^2+x+1)+x^2-4x\right]_0^4=3\ln 21-8$$

2.
$$\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha d\alpha$$
Pour $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ poser $x=\sin\alpha$ avec $0=\sin\alpha\Leftrightarrow\alpha=\arcsin 0=0$ et $1=\sin\alpha\Leftrightarrow\alpha=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$
$dx=\cos\alpha d\alpha$ et $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{\cos^2\alpha}=|\cos\alpha|=\cos\alpha$
$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha d\alpha=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}d\alpha=4\left[-\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4\left[-\frac{1}{4}\sin\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin 0-\frac{1}{2}\cdot 0\right]=\pi$$

3. $\forall x\in\mathbb{R}$
$$\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx=e^x\sin x-\left(e^x\cos x-\int -e^x\sin x dx\right)=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x dx$$
$$\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x dx\Leftrightarrow 2\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-e^x\cos x$$
$$\int e^x\sin x dx=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{2}+k$$

4. $\forall x\in I\subset\mathbb{R}\backslash\{k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\}$
$$\int\frac{1}{1+\sin^2 x}dx=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}}dx=\int\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan^2 x+\tan^2 x}dx=\int\frac{1+\tan^2 x}{1+(\sqrt{2}\tan x)^2}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}(1+\tan^2 x)}{1+(\sqrt{2}\tan x)^2}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+k$$

2+3+3+3=11 points

V. $f : t \longmapsto a\left(e^{-bt} - e^{-t}\right) \qquad \left(a, b \in \mathbb{R}_0^+\right)$

a) i. On a bien : $f(0) = 0$.

ii. On a : $(\forall t \in dom\ f) \qquad f'(t) = a\left(e^{bt} - be^{t}\right)e^{(-b-1)t}$

$f'(2\ln 2) = 0 \iff a = 0$ ou $b = \dfrac{1}{2}$ ou $b = 1$.

La solution $a = 0$ n'est pas acceptable, car $a > 0$ (et donnerait $f : x \longmapsto 0$).

La solution $b = 1$ n'est pas acceptable, car, dans ce cas, f serait la fonction nulle.

Donc $b = \dfrac{1}{2}$.

On a : $f'(2\ln 2) = 0$; $f'(1) > 0$ et $f'(2) < 0$.

Comme f' est continu, f' admet bien un maximum pour $t = 2\ln 2$.

Prenons $b = \dfrac{1}{2}$.

iii. On a : $f(2\ln 2) = \dfrac{5}{2} \iff a = 10$.

La fonction cherchée est donc $f : t \longmapsto 10\left(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\right)$.

b) Posons : $g : t \longmapsto 11\left(e^{-bt} - e^{-t}\right)$

On a : $g(6) = 2 \iff b = b_0 \approx 0,28187$

et, en prenant $b = b_0$, on obtient : $g'(t) = 0 \iff t = t_0 \approx 1,763$.

A l'instant t_0 la concentration est maximale et vaut environ $4,806$ ml/l.

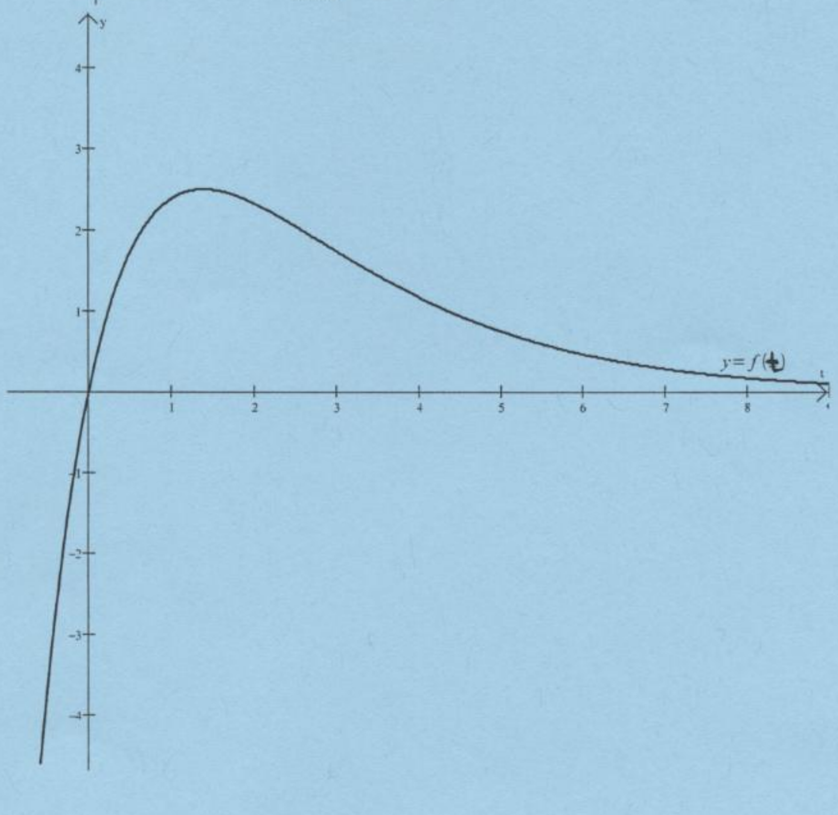
c) i. $f : t \longmapsto 10\left(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\right)$

$dom\ f = \mathbb{R}$, on réduit l'étude à $\mathbb{R}_+$
puisque le temps t est ≥ 0.

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0 \qquad \mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad f'(t) = -5e^{-t}\left(e^{\frac{t}{2}} - 2\right)$

t	0		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{5}{2}$ max	$\searrow$	0

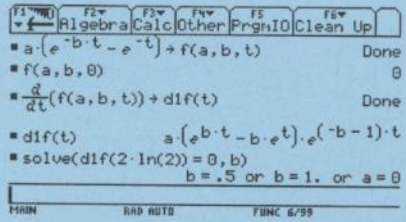


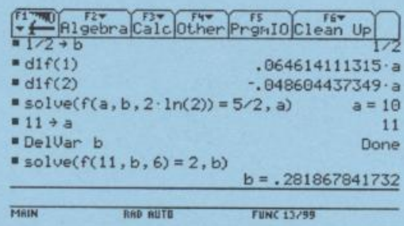
ii. La concentration est de 75% de la valeur maximale quand elle est égale à $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$

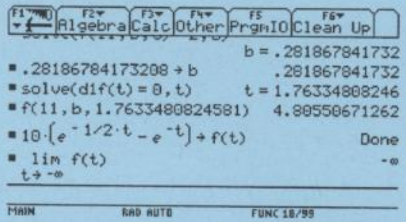
$f(t) = \frac{15}{8} \iff t = t_1 \approx 0,575$ ou $t = t_2 \approx 2,773$.

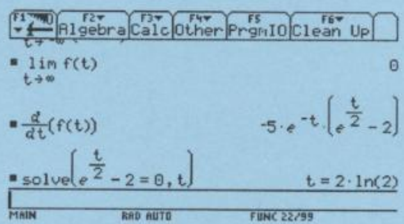
L'instant t_1 n'est pas la solution cherchée, car la concentration y est en augmentation $(f'(t_1) > 0)$.

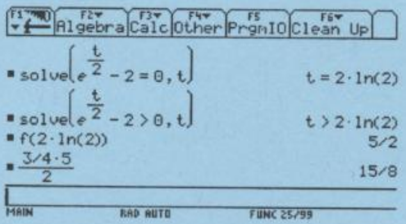
A l'instant t_2 la concentration est de $\frac{15}{8}$ et est décroissante. C'est donc l'instant cherché.

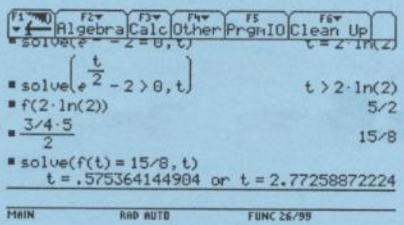


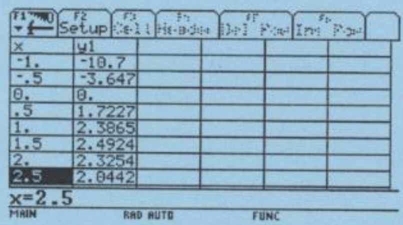


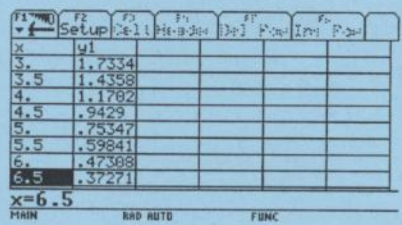


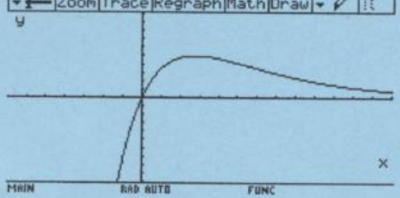












[15 points]