# MATHEMATIQUES 2008 - SECTIONS E, F, G
## CORRIGÉ

### Question 1

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 & (E1) \\ -x + 2y - z = 3 & (E2) \\ x - 4y + 3z = 3 & (E3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 & \\ -y + z = 3 & (E2) + (E1) \\ -y + z = 3 & (E3) - (E1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 & (1) \\ -y + z = 3 & (2) \end{cases}$$

Le système se ramène à un système de 2 équations à 3 inconnues, donc pas de solution unique.

Posons $y = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Dans (2) : $-\beta + z = 3 \Leftrightarrow z = \beta + 3$

Dans (1) $x - 3\beta + 2.(\beta + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3\beta + 2\beta + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \beta - 6$

$$S = \{ (\beta - 6 ; \beta ; \beta + 3) ; \beta \in \mathbb{R} \}$$

<u>Interprétation géométrique</u> :

Le système représente 3 plans sécants suivant la droite d passant par le point $A(-6 ; 0 ; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Question 2

$A(1,1,1)$ $\quad C(0,0,4)$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

$B(0,2,3)$

a) $M(x,y,z) \in \pi \iff \exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} : \quad \vec{CM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

$$\iff \exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x\\y\\z-4\end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\iff \exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = \beta & (1)\\ y = \alpha & (2)\\ z = \alpha + 2\beta + 4 & (3)\end{cases}$$

éq. para. de $\pi$

(1) et (2) dans (3) : $\quad z = y + 2x + 4$

$$\iff \underline{2x + y - z + 4 = 0} \quad \text{éq. cart. de } \pi.$$

b) $M(x,y,z) \in AB \iff \exists\, k \in \mathbb{R} : \quad \vec{AM} = k\cdot\vec{AB}$ $\qquad \vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

$$\iff \exists\, k \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\iff \exists\, k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = -k+1\\ y = k+1\\ z = 2k+1\end{cases}$$

3 éq. para. de AB.

c) Remplaçons les équations paramétriques de AB dans l'équation cartésienne de $\pi$ :

$$2\cdot(-k+1) + (k+1) - (2k+1) + 4 = 0$$

$$\iff -3k + 6 = 0$$

$$\iff k = 2$$

2 D'où : $x = -1, \quad y = 3, \quad z = 5$

$$AB \cap \pi = \{(-1;3;5)\}$$

## Question 3

a) $\ln(x+3)(x-4) = \ln(-4x-2)$ — CE : $(x+3)(x-4) > 0$

1 $\iff (x+3)(x-4) = (-4x-2)$ $\Big|$ $\ln \nearrow$ — 1 et $-4x-2 > 0$

$\iff x^2 - x - 12 = -4x - 2$ — 1 $\iff x \in \,]-\infty;-3[\,\cup\,]4;+\infty$ et $x < -\frac{1}{2}$

1 $\iff x^2 + 3x - 10 = 0$ — 1 $\underline{\text{dom}E = \,]-\infty;-3[}$

$\Delta = 9 + 40 = 49$

$x_1 = \dfrac{-3+7}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-3-7}{2}$

1 $= 2 \notin \text{dom}E$ $\qquad$ $= -5$

à rejeter

1 $S = \{-5\}$

b) $0{,}4^{1-5x} < 0{,}16^{x+2}$

1 $\iff 0{,}4^{1-5x} < (0{,}4^2)^{x+2}$

0,5 $\iff 0{,}4^{1-5x} < 0{,}4^{2x+4}$ — $0 < a = 0{,}4 < 1$

1 $\iff 1 - 5x > 2x + 4$ — $\exp_a \searrow$

$\iff -7x > 3$

1 $\iff x < -\frac{3}{7}$

0,5 $S = \,]-\infty; -\frac{3}{7}[$.

## Question 4

$f(x) = e^{x+2} - 1$

1 a) • $\text{dom}f = \mathbb{R} = \,]-\infty;+\infty[$

2 • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\overbrace{e^{x+2}}^{\to -\infty} - 1) = -1$ $\qquad$ $\underline{AH \equiv y = -1}$.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\overbrace{e^{x+2}}^{\to +\infty} - 1) = +\infty$ $\qquad$ ~~AH~~

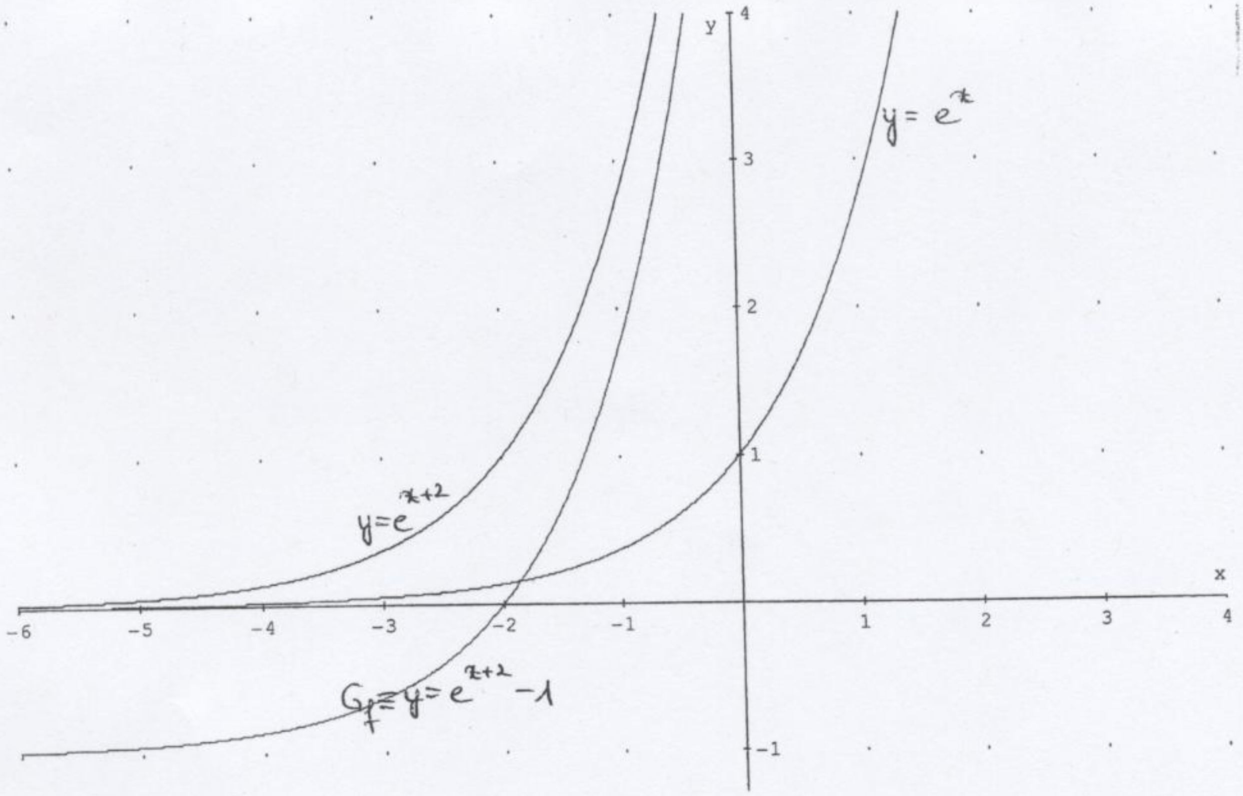
2 • $f(x) = 0 \iff e^{x+2} - 1 = 0 \iff x = -2$

b) Pour construire $G_f$ à partir de $G$, on construit

2 ① $G_1 \equiv y = e^{x+2}$, image de $G$ par la translation de

3 vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

3 ② $G_f$, image de $G_1$ par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$




c) 1 $f'(x) = e^{x+2}$ $\qquad f(-1) = e - 1$

1 $f'(-1) = e$

$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

1 Eq. de la tangente : $t \equiv y = e - 1 + e\cdot(x+1)$

$\Leftrightarrow \underline{t \equiv y = ex + 2e - 1}$

## Question 5

a) $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2+2x}$

$F_c(x) = \int \underbrace{(x+1)}_{\frac{1}{2}u'(x)} \underbrace{\sqrt{x^2+2x}}_{\sqrt{u(x)}}\, dx = \int \frac{1}{2} u'(x)\, u^{\frac{1}{2}}(x)\, dx$ $\qquad u(x) = x^2 + 2x$

1 $\qquad u'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$

1 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2+2x)^{3/2} + c$

0,5 $= \frac{1}{3}(x^2+2x)^{3/2} + c$ $\qquad , c \in \mathbb{R}$

$F_c(0) = 1 \Leftrightarrow 0 + c = 1$

$\Leftrightarrow c = 1$

1,5 D'où : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+2x)^{3/2} + 1$ est la primitive de $f$ qui prend la valeur 1 pour $x = 0$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{0} (x-2)\, e^{x}\, dx$

ipp :
$u(x) = x-2 \qquad v'(x) = e^{x}$
$u'(x) = 1 \qquad v(x) = e^{x}$

1,5

1 $\displaystyle = \left[ (x-2)e^{x} \right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} e^{x}\, dx$

1 $= \left[ (x-2)e^{x} \right]_{-2}^{0} - \left[ e^{x} \right]_{-2}^{0}$

$= -2e^{0} - (-4)e^{-2} - \left(e^{0} - e^{-2}\right)$

1,5 $= -3 + 5e^{-2}$

$\displaystyle = -3 + \frac{5}{e^{2}}$

c) $\displaystyle f(x) = \frac{1}{9} - \frac{x^{2}}{4}$ $\qquad$ dom $f = \mathbb{R}$

$\displaystyle = \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{x}{2}\right)$

$f(x) = 0 \iff x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{2}{3}$ .

3 Tableau des signes

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$\displaystyle \mathcal{A} = \int_{-1}^{0} |f(x)|\, dx$

1,5 $\displaystyle = \int_{-1}^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{x^{2}}{4} - \frac{1}{9}\right) dx + \int_{-\frac{2}{3}}^{0} \left(\frac{1}{9} - \frac{x^{2}}{4}\right) dx .$

1 $\displaystyle = \left[ \frac{x^{3}}{12} - \frac{x}{9} \right]_{-1}^{-\frac{2}{3}} + \left[ \frac{x}{9} - \frac{x^{3}}{12} \right]_{-\frac{2}{3}}^{0}$

1,5 $\displaystyle = \frac{-8}{324} + \frac{2}{27} + \frac{1}{12} - \frac{1}{9} + \frac{0}{9} - \frac{0}{8} + \frac{2}{27} - \frac{8}{324}$

$\displaystyle = \frac{23}{324}$ u.a.