# Corrigé - $I^{re}$ CD - MATH II - juin 2009



## Question 1

voir cours

## Question 2

- C.E. $\begin{cases} 3-x>0 \\ x+1>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>-1 \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<1 \qquad D_E = ]-1,1[$

- $$\frac{\ln(3-x)}{\ln 3} - 4\cdot\frac{\ln(x+1)}{\ln 3^2} \le \frac{\ln(1-x)}{\ln\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(3-x)}{\ln 3} - \frac{\cancel{4}^{2}\cdot\ln(x+1)}{\cancel{2}\cdot\ln 3} \le \frac{\ln(1-x)}{-\ln 3} \qquad |\cdot\ln 3>0$$

$$\Leftrightarrow \ln(3-x) - 2\ln(x+1) \le -\ln(1-x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(3-x)+\ln(1-x) \le 2\ln(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\ln}(3-x)(1-x) \le \cancel{\ln}(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3-3x-x+\cancel{x^2} \le \cancel{x^2}+2x+1$$

$$\Leftrightarrow -6x \le -2 \qquad |:(-6)\underline{\underline{<0}}$$

$$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{3}$$

- $S = [\frac{1}{3}, 1[$

## Question 3

$$\lim_{+\infty}\left(1-\underset{\downarrow\,0}{\frac{1}{2x}}\right)^{\overset{\to -\infty}{2-x}} \qquad \text{f.i. } 1^{\infty}$$

posons: $y = -\frac{1}{2x}$

alors: $x\to+\infty \Leftrightarrow y\to 0^-$ et $-x = \frac{1}{2y}$, d'où:

$$\lim_{y\to 0^-}(1+y)^{2+\frac{1}{2y}} = \lim_{0^-}(1+y)^{\frac{4y+1}{2y}} = \lim_{0^-}\left[\underset{\downarrow\,e}{(1+y)^{\frac{1}{y}}}\right]^{\overset{\to\frac{1}{2}}{\frac{4y+1}{2}}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

## Question 4

1) - $\sin^2 x\cdot\cos 2x = \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\cos 2x = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos^2 2x$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 4x)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x$$

- $\int \sin^2 x\cdot\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int\cos 4x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x$$

$$F(x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x$$

$$F(\pi) = -\frac{\pi}{4} \quad , \quad F(0) = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos 2x \, dx = -\frac{\pi}{4}$$

2) $$F(x) = \int \frac{10x-3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \underbrace{\int \frac{10x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx} - \underbrace{\int \frac{3}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}}\,dx}$$

pos. $u = 4-x^2$

alors $u' = -2x$

$\iff -5u' = 10x$

$f = -\frac{5u'}{\sqrt{u}} = -5u'\cdot u^{-\frac{1}{2}}$

$F = -5\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -10\sqrt{u}$

$\int \frac{3}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx$

pos. $u = \frac{x}{2}$

alors $u' = \frac{1}{2}$

$f = 3\cdot\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$F = 3\,\mathrm{Asin}\,u$

$$F(x) = -10\sqrt{4-x^2} - 3\,\mathrm{Asin}\,\frac{x}{2}$$

$$F(1) = -10\sqrt{3} - 3\,\mathrm{Asin}\,\frac{1}{2} = -10\sqrt{3} - \cancel{3}\cdot\frac{\pi}{\cancel{6}\,2}$$

$$F(0) = -10\sqrt{4} - 3\,\mathrm{Asin}\,0 = -20$$

D'où : $$\int_0^1 \frac{10x-3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -10\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} + 20 \quad (\approx 1{,}1087)$$

3) a) $$\frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2 + b(2x-1)(x+1) + c(2x-1)}{(2x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{a(x^2+2x+1) + b(2x^2 + \overset{+x}{\cancel{2x-x}} - 1) + 2cx - c}{(2x-1)(x^2+2x+1)}$$

$$= \frac{ax^2 + 2ax + a + 2bx^2 + bx - b + 2cx - c}{2x^3 + 4x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1}$$

$$= \frac{(a+2b)x^2 + (2a+b+2c)x + a - b - c}{2x^3 + 3x^2 - 1} = P(x)$$

$$P(x) = f(x) \iff \begin{cases} a + 2b = -4 & (1) \\ 2a + b + 2c = 9 & (2) \\ a - b - c = 1 & (3) \end{cases}$$

(3) : $c = a - b - 1$

$\rightarrow$ (2) : $2a + b + 2a - 2b - 2 = 9 \iff 4a - b = 11 \iff b = 4a - 11$ (4)

$(4) \to (1)$ : $a + 8a - 22 = -4 \Leftrightarrow 9a = 18 \Leftrightarrow \underline{a = 2}$

$\to (4)$: $\underline{b = -3}$ $(= 4 \cdot 2 - 11)$

$\to (3)$: $\underline{c = 4}$ $(= 2 + 3 - 1)$

D'où $f(x) = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{(x+1)^2}$

autre méthode

- $(2x-1)(x+1)^2 = \ldots = 2x^3 + 3x^2 - 1$ donc $f(x) = \dfrac{-4x^2+9x+1}{(2x-1)(x+1)^2}$

- soit $\dfrac{-4x^2+9x+1}{(2x-1)(x+1)^2} = \dfrac{a}{2x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$ $(*)$

$(*) \,|\cdot (2x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x^2+9x+1}{(x+1)^2} = a + \underbrace{\left(\dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\right)\underbrace{(2x-1)}_{\to 0}}_{\to 0}$

on calcule la limite pour $x \to \frac{1}{2}$

$$\frac{-1 + \frac{9}{2} + 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{9} = 2$$

D'où : $\underline{a = 2}$

$(*) \,|\cdot (x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x^2+9x+1}{2x-1} = \underbrace{\dfrac{a(x+1)^2}{2x-1}}_{\to 0} + \underbrace{b(x+1)}_{\to 0} + c$

limite pour $x \to -1$

$$\frac{-4-9+1}{-2-1} = \frac{-12}{-3} = 4$$

donc $\underline{c = 4}$

$(*) \,|\cdot (x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x^2+9x+1}{(2x-1)(x+1)} = \dfrac{a(x+1)}{2x-1} + b + \underbrace{\dfrac{c}{x+1}}_{\to \left(\frac{c}{\infty}\right) = 0}$

limite pour $x \to \infty$

$$\approx \frac{-4\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} \to -2 \qquad \approx \frac{a\cancel{x}}{2\cancel{x}} \to \frac{a}{2} = 1$$

d'où $-2 = 1 + b + 0 \Leftrightarrow \underline{b = -3}$

b) $f(x) = \underbrace{\dfrac{2}{2x-1}}_{} - \underbrace{\dfrac{3}{x+1}}_{} + \underbrace{\dfrac{4}{(x+1)^2}}_{}$

| | | |
|---|---|---|
| $u = 2x-1$ | $u = x+1$ | $u = x+1$ |
| $u' = 2$ | $u' = 1$ | $u' = 1$ |
| $f = \frac{u'}{u}$ | $f = 3\frac{u'}{u}$ | $f = 4u'u^{-2}$ |
| $F = \ln\lvert u\rvert$ | $F = 3\ln\lvert u\rvert$ | $F = 4 \cdot \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{4}{u}$ |

$\underline{I}$ = intervalle qui contient 0 et où $f$ est définie, p.ex. $\underline{I = ]-1; \tfrac{1}{2}[}$

$$F(x) = \ln|2x-1| - 3\ln|x+1| - \frac{4}{x+1} + k$$

$$F(0) = 1 \iff \underbrace{\cancel{\ln 1}}_{0} - 3\cdot\underbrace{\cancel{\ln 1}}_{0} - \frac{4}{1} + k = 1 \iff \underline{k = 5}$$

D'où $F(x) = \ln|2x-1| - 3\ln|x+1| - \frac{4}{x+1} + 5$

Question 5

$$f(x) = e^x (2-x)^2$$

1) $D_f = \mathbb{R}$

• $\lim\limits_{+\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty} \underbrace{(2-x)^2}_{+\infty} = +\infty$, pas d'A.H.D.

• $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} e^x \frac{(x^2-4x+4)}{x} = \lim\limits_{+\infty} e^x \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$

$\to$ B.P. de direction Oy pour $x \to +\infty$

• $\lim\limits_{-\infty} \underbrace{e^x}_{0} \underbrace{(2-x)^2}_{+\infty}$ f.i $(0\cdot\infty)$

$= \lim\limits_{-\infty} \frac{(2-x)^2}{\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}}$ f.i $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\underset{(H)}{=} \lim\limits_{-\infty} \frac{2(2-x)(-1)}{-e^{-x}}$ f.i $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$\underset{(H)}{=} \lim\limits_{-\infty} \frac{+2}{+e^{-x}} = \left(\frac{2}{+\infty}\right) = 0$ , $\underline{\text{A.H.G. } y = 0}$

2) $D_{f'} = \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x(2-x)^2 + e^x\cdot 2(2-x)(-1)$$
$$= e^x(\cancel{4} - 4x + x^2 \cancel{-4} + 2x)$$
$$= e^x(x^2-2x) \quad \text{signe de } x^2-2x$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$x^2-2x=0$
$\iff x(x-2)=0$
$\iff x=0$ ou $x=2$

3) $D_{f''} = \mathbb{R}$

$f''(x) = e^x(x^2-2x) + e^x(2x-2) = e^x(x^2 \cancel{-2x} \cancel{+2x} - 2)$

signe de $x^2-2$

$x^2-2=0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $G_f$ | | $\cup$ | | $\cap$ | | $\cup$ | |

2 pts d'infl. $I(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2})) = I(-1{,}4\,;\,2{,}8)$

$J(\sqrt{2}, f(\sqrt{2})) = J(1{,}4\,;\,1{,}4)$

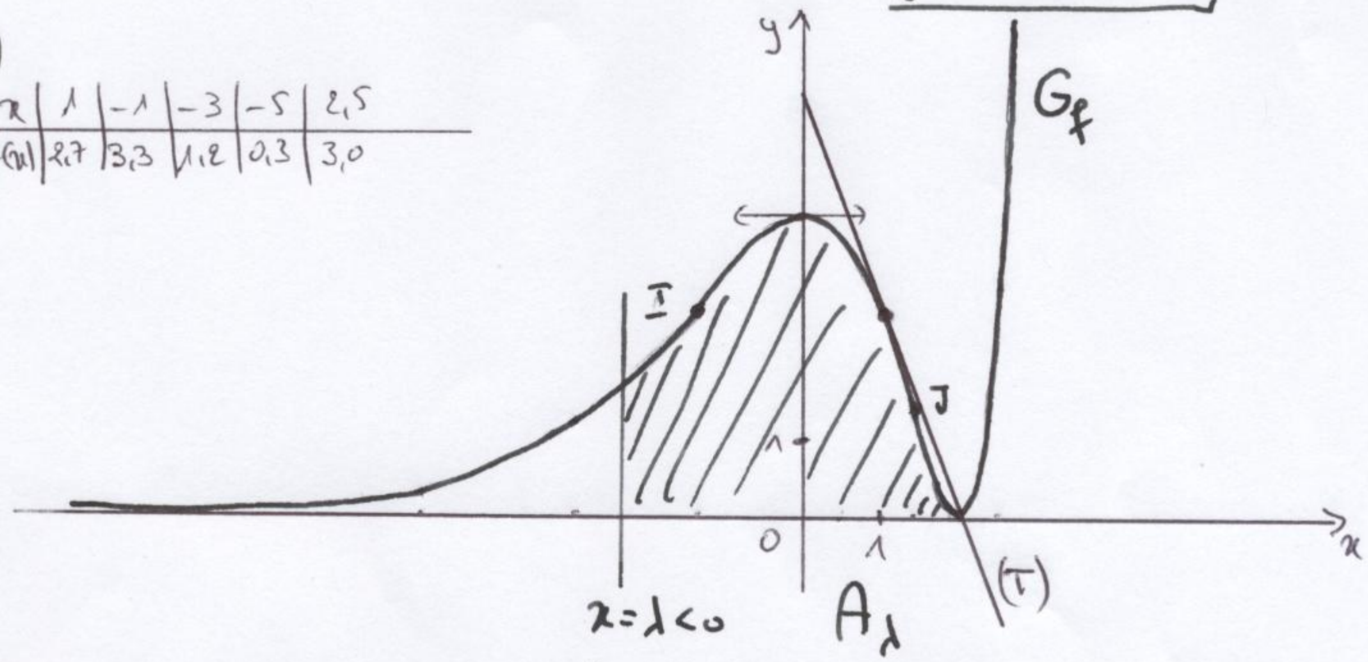
4) $(T) \equiv y - f(1) = f'(1)(x-1)$

or $f(1) = e$ et $f'(1) = -e$, donc $(T) \equiv y = -e(x-1) + e$

$\equiv \underline{y = -ex + 2e}$

5)

| $x$ | $1$ | $-1$ | $-3$ | $-5$ | $2{,}5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2{,}7$ | $3{,}3$ | $1{,}2$ | $0{,}3$ | $3{,}0$ |




6) Comme $f \geq 0$, $A_\lambda = \int_\lambda^2 e^x(2-x)^2\,dx$

$F(x) = \int e^x(2-x)^2\,dx$ i.p.p. $\left| \begin{array}{ll} u = (2-x)^2 & u' = 2(2-x)(-1) = 2x-4 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right.$

$F(x) = e^x(2-x)^2 - \int e^x(2x-4)\,dx$ i.p.p. $\left| \begin{array}{ll} u = 2x-4 & u' = 2 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right.$

$= e^x(2-x)^2 - \left[(2x-4)e^x - \int 2e^x\,dx\right]$

$= e^x(2-x)^2 - (2x-4)e^x + 2e^x$

$= e^x(4-4x+x^2-2x+4+2)$

$= e^x(x^2-6x+10)$

$A_\lambda = F(2) - F(\lambda) = 2e^2 - e^\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 10)$

$\lim_{-\infty} \underset{0}{e^\lambda}\,(\underset{\approx \lambda^2 \to +\infty}{\lambda^2 - 6\lambda + 10})$ $(f.i.\ 0\cdot\infty)$ = lim

$= \lim_{-\infty} \dfrac{\lambda^2 - 6\lambda + 10}{\underset{\to +\infty}{e^{-\lambda}}}$ f.i. $\frac{\infty}{\infty}$

$\underset{(H)}{=} \lim_{-\infty} \dfrac{2\lambda - 6}{-e^{-\lambda}}$ f.i. $\frac{-\infty}{-\infty}$

$\underset{(H)}{=} \lim \dfrac{2}{e^{-\lambda}} = \left(\dfrac{2}{+\infty}\right) = 0$

D'où $\lim_{\lambda \to -\infty} A_\lambda = 2e^2$ u.a. ($\approx 14{,}78$ u.a.)

## Problème V200

1) a) $f(t) = 20\,t\,e^{-0{,}5t}$ $(0 \le t \le 20)$

V200 : • $f'(t) = 0 \iff t = 2$ avec $f'(t) = (20 - 10t)\,e^{-0{,}5t}$

• $\begin{cases} f'(t) > 0 \text{ si } t < 2 \\ f'(t) < 0 \text{ si } t > 2 \end{cases}$ ou $f''(2) \approx -3{,}68 < 0$

Donc $f$ atteint bien un maxi en $t = 2$ et cette concentration maximale vaut $\approx 14{,}72$ mg/l $(= f(2))$

b) Le médicament est efficace ssi $f(x) \geq 5$, or on constate que la V200 ne sait pas résoudre cette inéquation ! Par contre pour $f(x) = 5$ elle donne les solutions $t_1 \approx 0{,}29$ et $t_2 \approx 6{,}52$.
Il suffit alors de consulter le graphe ou le tableau des images de $f$ pour conclure que :

$f(t) \geq 5 \iff 0{,}29 \leq t \leq 6{,}52$,

c'est-à-dire entre 0,29h et 6,52h après la prise du médicament.

c) La variation de la concentration est exprimée par la fonction $f'(t)$.

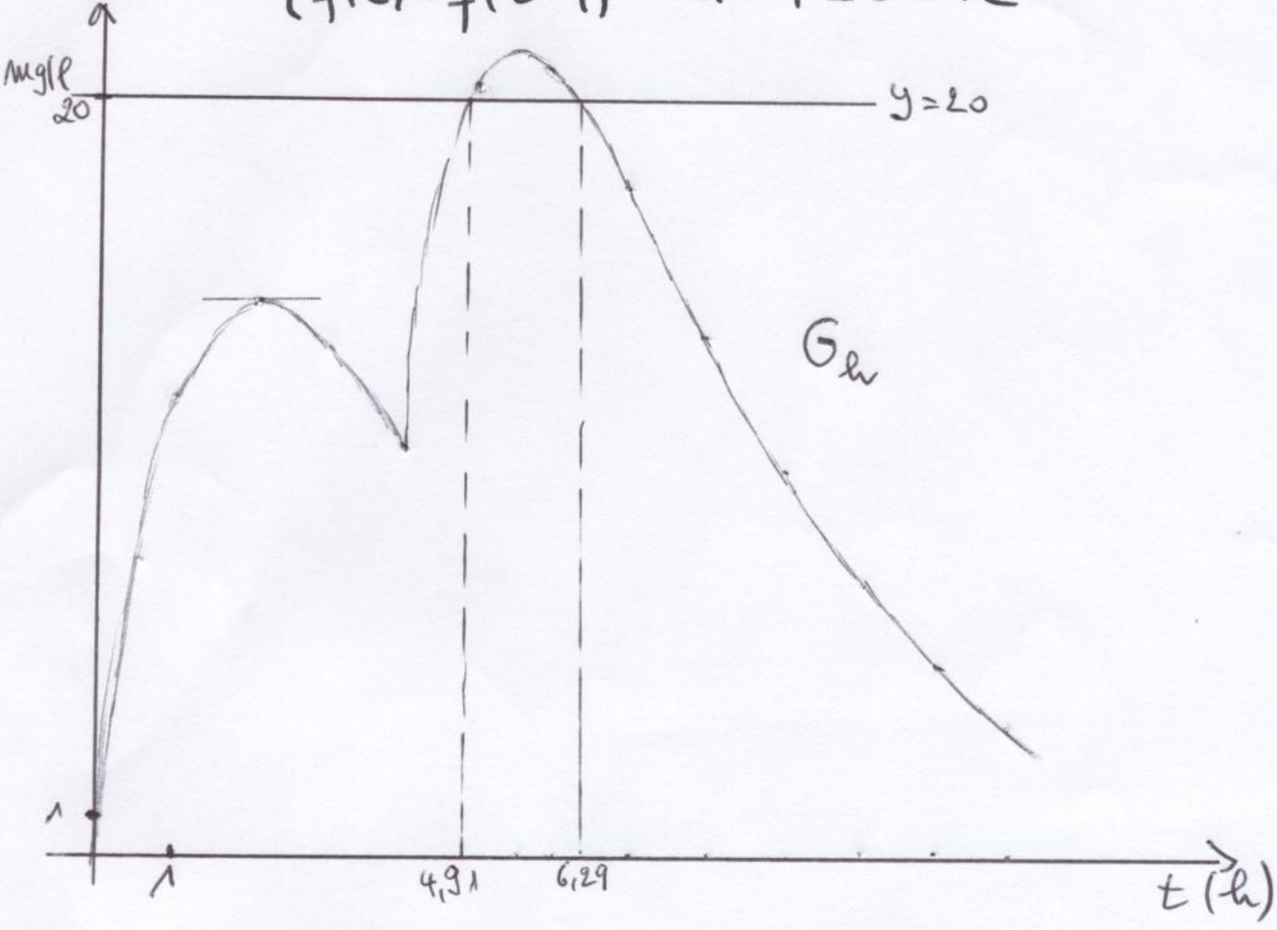
Voici : $f''(t) = (5t-20)\,e^{-0,5t}$

| $x$ | 0 | | 4 | | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f'$ | | $\searrow$ | $-2,71$ | $\nearrow$ | |

On constate que $f'$ a un <u>minimum</u> égal à $-2,71$ en $t=4$. On interprète le signe "$-$" du résultat en disant qu'il s'agit d'une vitesse d'<u>élimination</u>, càd la concentration du médicament <u>décroît</u> au voisinage de $t=4$. La valeur absolue, c'-à-d. 2,71 mg/l/h, est alors la <u>vitesse d'élimination maximale</u>.

2) a) La fonction exprimant la concentration totale (des 2 prises) dans le sang est :

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 \le t \le 4 \\ f(t) + f(t-4) & \text{si } 4 \le t \le 12 \end{cases}$$



b) En traçant $y=20$ on voit que la dose maximale de 20 mg/l est dépassée pour $4{,}91\,h \leq t \leq 6{,}29$

3) $g(t) = a t e^{-bt}$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$

a) Il faut résoudre le système :
$$\begin{cases} g(4) = 14 \\ g'(4) = 0 \end{cases}$$ (conditions nécessaires)
V200 : $a = \frac{7}{2}e$, $b = \frac{1}{4}$
D'où : $g(t) = \frac{7}{2} t e^{1 - \frac{1}{4}t}$
Vérifions que ceci est bien la fonction cherchée :
V200 : $g''(4) = -\frac{7}{8} < 0$ donc $g$ a bien un maxi pour $t=4$.

b) V200 : $g(t) = 5 \Leftrightarrow t \simeq 0{,}61$ ou $t \simeq 12{,}75$
Graphiquement on voit que le médicament B est efficace (càd $g(t) \geq 5$) pour $t \in [0{,}61 ; 12{,}75]$, donc pendant $12{,}75 - 0{,}61 \simeq 12{,}14\,h$ alors que le médicament A n'est efficace que pendant $6{,}52 - 0{,}29 \simeq 6{,}23\,h$.
B a donc une "durée d'efficacité" presque 2 fois plus longue !