

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2009

Section: C,D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

Question 1

Démontrez la propriété suivante : Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, alors la fonction $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et sa dérivée est f .

(5 points)

Question 2

Résolvez l'inéquation suivante : $\log_3(3 - x) - 4 \log_9(x + 1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(1 - x)$

(5 points)

Question 3

Calculez la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{2-x}$

(3 points)

Question 4

1. Calculez $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \cos 2x dx$, en linéarisant d'abord $\sin^2 x \cdot \cos 2x$.

2. Calculez $\int_0^1 \frac{10x - 3}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

3. On considère la fonction f définie sur $\text{dom } f = \mathbb{R} - \{-1; \frac{1}{2}\}$ par $f(x) = \frac{-4x^2 + 9x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 1}$.

(a) Déterminez les réels a, b, c tels que pour tout $x \in \text{dom } f$:

$$f(x) = \frac{a}{2x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{(x + 1)^2}$$

(b) Déterminez la primitive F de f sur un intervalle I à préciser telle que $F(0) = 1$.

(4+4+4=12 points)

Question 5

On donne la fonction f définie par

$$f(x) = e^x \cdot (2 - x)^2$$

1. Déterminez le domaine de définition de f et étudiez le comportement asymptotique de f .

2. Étudiez le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3. Étudiez l'existence de points d'inflexion.

4. Déterminez l'équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

5. Représentez graphiquement f dans un repère orthonormé d'unité 1cm. Tracez la tangente \mathcal{T} .

6. Soit un réel $\lambda < 0$. Calculez l'aire \mathcal{A}_λ de la partie S du plan délimitée par la courbe C_f et les droites d'équations respectives $x = \lambda$, $x = 2$ et $y = 0$. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{A}_\lambda$.

(3+3+3+2+3+6=20 points)

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2009

Sections: C et D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

Problème V200 (15 points)

Remarques préliminaires :

- Tous les calculs de ce problème sont à faire à l'aide de la calculatrice TI-V200
- Les résultats seront approchés à 10^{-2} près
- La modélisation du problème, la présentation d'une réponse structurée et argumentée, la clarté des raisonnements, la maîtrise du vocabulaire et des notations mathématiques ainsi que la qualité de la rédaction interviendront dans l'appréciation de la copie.

L'évolution de la concentration d'un médicament A dans le sang d'un patient peut être décrite par une fonction f définie par $f(t) = 20 \cdot t \cdot e^{-0.5t}$ (avec $0 \leq t \leq 12$).

où t désigne le temps en heures après la prise du médicament A qui s'effectue au moment $t = 0$,
 $f(t)$ est exprimé en milligrammes par litre de sang (mg/l).

- 1) a) À quel moment la concentration de ce médicament est-elle maximale ?
Quelle est alors la valeur de cette concentration ?
b) Le médicament perd son efficacité si sa concentration tombe strictement en dessous de 5 mg/l.
Déterminer la période pendant laquelle le médicament est efficace.
c) À quel moment l'élimination du médicament par le corps du patient est-elle la plus forte ?
Quelle est alors la vitesse de cette élimination ?

- 2) Quatre heures après la première prise du médicament A, on donne ce médicament une deuxième fois au patient. On suppose que le dosage de la deuxième prise est identique à celui de la première prise et que les concentrations du médicament dans le sang du patient sont simplement additionnées.
a) Représenter graphiquement l'évolution de la concentration totale du médicament dans le sang pendant les douze premières heures après la première prise (c'est-à-dire pour $0 \leq t \leq 12$).
b) La concentration du médicament ne doit pas dépasser 20 mg/l. Est-ce que cette directive médicale est respectée ?

- 3) En changeant la composition du médicament A, on peut fabriquer un médicament B dont l'évolution de la concentration dans le sang peut être décrite par une fonction g définie par $g(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$ (avec $0 \leq t \leq 12$).
où t désigne le temps en heures après la prise du médicament B qui s'effectue au moment $t = 0$,
 $g(t)$ est exprimé en milligrammes par litre de sang (mg/l),
 a et b sont des constantes réelles strictement positives.
a) Déterminer les constantes a et b et l'expression analytique de g , pour que la concentration de ce médicament dans le sang atteigne, 4 heures après la prise, sa valeur maximale de 14 mg/l.
b) Comparer les médicaments A et B quant à leur efficacité pendant les douze premières heures après la prise, en supposant qu'ils sont efficaces si leur concentration dans le sang est supérieure à 5 mg/l.