Examen de fin d'études secondaires : Sections C et D

Mathématiques II ; Corrigé

I, 1) $\forall x\in\mathbb{R},\quad 2^{1-2x}+\left(\frac{1}{2}\right)^x=3$

$\Leftrightarrow 2\cdot 2^{-2x}+2^{-x}=3 \quad |\cdot 2^{2x}$

$\Leftrightarrow 2+2^x=3\cdot 2^{2x}$

$\Leftrightarrow 3\cdot 2^{2x}-2^x-2=0 \qquad$ Poser $y=2^x$

$\Leftrightarrow 3y^2-y-2=0 \qquad \Delta=1+24=25$

$\Leftrightarrow \underbrace{y=-\tfrac{2}{3}}_{\text{imp. car } y>0} \text{ ou } y=1$

$\Leftrightarrow 2^x=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \qquad \underline{S=\{0\}}$

---

2) $2\cdot \log_{1/2}(2x-3)+\log_2(10-4x)\leq 1 \qquad (I)$

C.E. : $\begin{cases}2x-3>0\\10-4x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>3/2\\x<5/2\end{cases} \Leftrightarrow \underline{x\in\,]3/2,5/2[}$

$\forall x\in\,]3/2,5/2[,\ (I)\Leftrightarrow 2\,\dfrac{\ln(2x-3)}{\ln 1/2}+\dfrac{\ln(10-4x)}{\ln 2}\leq 1 \ |\cdot \ln 2$

$\Leftrightarrow -2\ln(2x-3)+\ln(10-4x)\leq \ln 2$

$\Leftrightarrow \ln(10-4x)\leq \ln 2+\ln(2x-3)^2$

$\Leftrightarrow 10-4x\leq 2(2x-3)^2$

$\Leftrightarrow 8x^2-24x+18-10+4x\geq 0$

$\Leftrightarrow 8x^2-20x+8\geq 0 \ |:4$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2\geq 0 \qquad \Delta=25-16=9$

$\Leftrightarrow x\in\,]-\infty,\tfrac{1}{2}]\cup[2,+\infty[\qquad x_1=\tfrac{1}{2}$ et $x_2=2$

$\underline{S=[2,5/2[}$

---

3) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)^x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln(x+1/x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0^+} \underbrace{\ln(x+1/x)}_{\to +\infty}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1/x) \to +\infty}{1/x \to +\infty}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1/x)}{1/x} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1-1/x^2}{x+1/x}}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x^2+1}{x+1/x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^0 = 1$

b) $f'(x) = \left(e^{x\ln(x+1/x)}\right)' = \left[\ln(x+1/x) + x\cdot\frac{1-1/x^2}{x+1/x}\right] e^{x\ln(x+}$

$= \left[\ln(x+1/x) + \frac{x-1/x}{x+1/x}\right](x+1/x)^x$

$= \left[\ln(x+1/x) + \frac{x^2-1}{x^2+1}\right](x+1/x)^x$

$T_{f,1}: \quad y - f(1) = f'(1)(x-1) \qquad f(1) = 2$

$\Leftrightarrow y - 2 = 2\ln 2\cdot(x-1) \qquad f'(1) = \ln 2 \cdot 2$

$\Leftrightarrow y = (2\ln 2)\cdot x + 2(1-\ln 2)$

II.1 $\quad f(x) = \ln x + \frac{e}{x}$

1) a) Dom $f = \mathbb{R}_0^+$

b) Limites et asymptotes

(•) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\ln x}_{\to+\infty} + \underbrace{\frac{e}{x}}_{\to 0}\right) = +\infty \Rightarrow$ pas d'AH qd $x\to$.

(•) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x + \underbrace{\frac{e}{x}}_{\to+\infty}\right) \qquad$ (f.i. $-\infty+\infty$)

$$= \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty} \, (\underbrace{\underbrace{x \ln x}_{\to 0} + e}_{\to -\infty})$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left(\lim_{x \to 0^+} x \ln x + e \right) \quad \text{f.i. } 0 \cdot (-\infty)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{\to -\infty}{\ln x}}{\underbrace{1/x}_{\to +\infty}} + e \right) \quad \text{f.i. } \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} + e \right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \left(- \lim_{x \to 0^+} x + e \right)$$

$$= (+\infty) \cdot e = +\infty \quad \Rightarrow \text{AV: } x = 0$$

c) <u>Dérivées</u>

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{x^2} = \frac{x-e}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad f''(x) = \frac{x^2 \cdot 1 - 2x(x-e)}{x^4} = \frac{-x+2e}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2e$$

d) <u>Tableau de variations, extrémum et p^t d'inflexi</u>

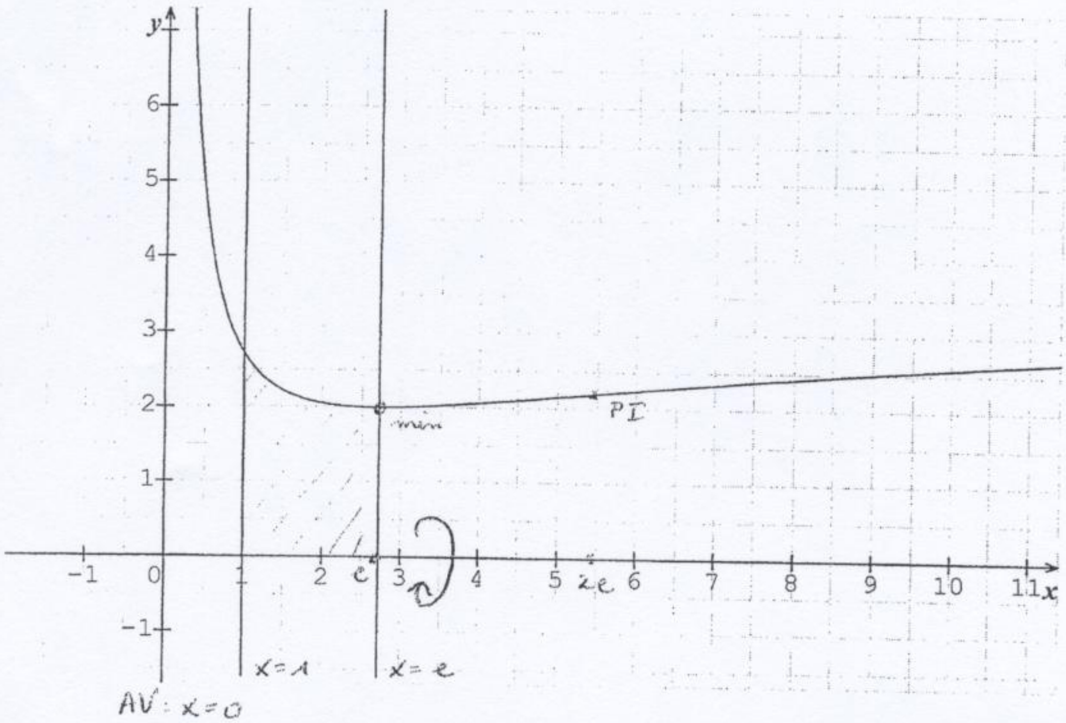
x	0		e		$2e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0		$+$		
$f''(x)$	‖		$+$		0		
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2 min	↗	$\ln 2 + 3/2$ $\approx 2{,}19$	↗	$+\infty$
$\mathcal{C}_f$	AV: $x=0$				PI		

x		0		$2e$	
$-x+2e$			$+$	0	$-$
x^3	$-$	0	$+$		
$\frac{-x+2e}{x^3}$	$-$	‖	$+$	0	$-$

$f(e) = \ln e + \frac{e}{e} = 2$

$f(2e) = \ln 2e + \frac{e}{2e} = \ln 2 + \ln e + $

e) Représentation graphique dans un RON



2) $\mathcal{A} = \int_1^e \left(\ln x + \frac{e}{x}\right) dx$

$\int \ln x \, dx$

IPP avec $F(x) = \ln x$ et $G'(x) =$

$= x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$ $\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x}$ et $G(x) =$

$= \left[x \ln x - x + e \ln x\right]_1^e$

$= x \ln x - x \ (+k)$

$= e \ln e - e + e \ln e - 1 \ln 1 + 1 - e \ln 1$

$= e - e + e - 0 + 1 - 0$

$= e + 1 \simeq 3{,}7$ u.a.

3) $V = \pi \int_1^e \left(\ln x + \frac{e}{x}\right)^2 dx$

$= \pi \int_1^e \left[(\ln x)^2 + 2e \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} \underbrace{\ln x}_{u(x)} + \underbrace{\frac{e^2}{x^2}}_{e^2 \cdot x^{-2}}\right] dx$

IPP avec $H(x) = (\ln x)^2$ et $G'(x)$

$\int (\ln x)^2 dx$

$\Rightarrow H'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$ et $G(x) = x$

$= x (\ln x)^2 - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \, dx$

$= x (\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, dx$

$= x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \ (+k)$

$V = \pi \left[x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + e (\ln x)^2 - e^2 \cdot \frac{1}{x}\right]_1^e$

$= \pi \left\{ \left[e (\ln e)^2 - 2e \ln e + 2e + e (\ln e)^2 - e^2 \cdot \frac{1}{e}\right] \right.$

$\left. - \left[0 - 0 + 2 + 0 - e^2\right] \right\}$

$= \pi \left(e - 2e + 2e + e - e - 2 + e^2\right) = \pi\left(e^2 + e - 2\right)$ u.v.

III.1 1) voir livre EM 66 p. 86

2) $\forall x \in \mathbb{R}_0, \quad \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2+1} \quad \Big| \cdot x(x^2+1)$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = a(x^2+1) + bx$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = ax^2 + bx + a$

$\Leftrightarrow \quad a = 1 \quad$ et $b = -1$

$F(x) = \displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$

$= \ln|x| - \operatorname{Arctan} x + k$

$F(1) = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \ln|1| - \operatorname{Arctan} 1 + k = \pi/4$

$\Leftrightarrow -\pi/4 + k = \dfrac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow k = \dfrac{\pi}{2}$

Donc $F(x) = \ln|x| - \operatorname{Arctan} x + \pi/2$

---

3) $\displaystyle\int \cos^2 x \, e^x \, dx$

$= \cos^2 x \cdot e^x + \displaystyle\int \sin 2x \cdot e^x \, dx$

IPP avec
$F(x) = \cos^2 x$ et $G'(x) = e^x$
$\Rightarrow F'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x)$ et $G(x) = e^x$
$\Leftrightarrow F'(x) = -\sin 2x$ et $G(x) = e^x$

Poser

$I = \displaystyle\int \sin 2x \, e^x \, dx$

$= \sin 2x \cdot e^x - 2\displaystyle\int \cos 2x \, e^x \, dx$

IPP avec
$H(x) = \sin 2x$ et $G'(x) = e^x$
$\Rightarrow H'(x) = 2\cos 2x$ et $G(x) = e^x$

$= \sin 2x \cdot e^x$
$-2 \cdot \left[\cos 2x \cdot e^x + 2\displaystyle\int \sin 2x \, e^x \, dx\right]$

IPP avec
$K(x) = \cos 2x$ et $G'(x) = e^x$
$\Rightarrow K'(x) = -2\sin 2x$ et $G(x) = e^x$

$= \sin 2x \cdot e^x - 2\cos 2x \cdot e^x - 4I$

$5I = \sin 2x \cdot e^x - 2\cos 2x \cdot e^x \Leftrightarrow I = \frac{1}{5}\left(\sin 2x - 2\cos 2x\right) \cdot e^x$

et $\displaystyle\int \cos^2 x \, e^x \, dx = \left(\cos^2 x + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x\right) \cdot e^x + k$

$= \left(1/2 + 1/5 \sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x\right) \cdot e^x + k$

Corrigé du problème

1) Aire de la surface comprise entre l'axe Ox et la courbe $\mathcal{C}_f$:

$$\mathcal{A}_1 = -\int_{-6}^{6} f(x)\,dx \overset{V200}{=} -\left(26\,\text{Arctan}\,\tfrac{2}{3} - 13\pi + 12\right) \simeq 13{,}55\ m^2$$

Volume d'eau dans le canal :

$$V_1 = \mathcal{A}_1 \cdot 500 \approx 6776{,}32\ m^3$$

2) Si la hauteur des eaux est de 1 m, alors elle est représentée par la droite d'équation $y = -1{,}25$

Abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = -1{,}25$ avec $\mathcal{C}_f$:

$$f(x) = -1{,}25 \overset{V200}{\Leftrightarrow} x = -\tfrac{8}{3} \text{ ou } x = \tfrac{8}{3}$$

Aire de la surface comprise entre la droite d'équation $y = -1{,}25$ et la courbe $\mathcal{C}_f$:

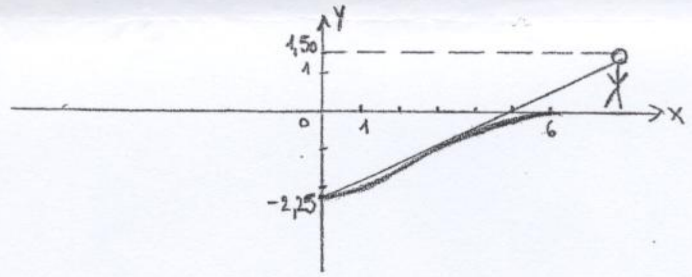
$$\mathcal{A}_2 = \int_{-\frac{8}{3}}^{\frac{8}{3}} \left(-1{,}25 - f(x)\right) dx \overset{V200}{=} 2\cdot\left(13\,\text{Arctan}\,\tfrac{2}{3} - 6\right) \approx 3{,}29\ m^2$$

Volume d'eau dans le canal :

$$V_2 = A_2 \cdot 500 \simeq 1644{,}03\ m^3$$

Pourcentage : $\dfrac{1644{,}03}{6776{,}32} \approx 0{,}2426 \approx 24{,}26\,\%$

3)



Le rayon visuel correspond à la droite t passant par le point $B(0; -2{,}25)$ et tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en un point encore inconnu $A(a, f(a))$

Comme $B(0; -2{,}25) \in t$, on a $t \equiv y = k\cdot x - 2{,}25$

t est tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(a, f(a)) \Leftrightarrow f(a) = f'(a)\cdot a - 2{,}25$

$$\overset{V200}{\Leftrightarrow} a = -4 \text{ ou } a = 0 \text{ ou } a = 4$$

En prenant le schéma ci-dessus, on voit que $a = 4$.

Pente de la droite t : $k = f'(4) = \frac{13}{32}$

Donc $t \equiv y = \frac{13}{32}x - 2{,}25$

Calculons encore l'abscisse du point d'ordonnée 1,50 de cette droite :

$$1{,}50 = \tfrac{13}{32}x - 2{,}25 \Leftrightarrow x = \tfrac{120}{13} \approx 9{,}23$$

$9{,}23 - 6 = 3{,}23$

Donc l'homme peut se situer à une distance maximale de 3,23 m du bord du canal s'il veut encore apercevoir le point le plus profond du canal.

4) Comme le pont est symétrique par rapport à l'axe Oy, la fonction polynôme du 4e degré doit être paire. Soit $g(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Résolvons le système suivant à l'aide de la V200 :

$$\begin{cases} g(0) = 1{,}5 \\ g'(0) = 0 \\ g(8) = 0 \\ g'(8) = 0 \end{cases}$$

On obtient $g(x) = \frac{3}{8192}x^4 - \frac{3}{64}x^2 + \frac{3}{2}$

La courbe de cette fonction réduite à l'intervalle $[-8;8]$ représente le pont cherché.

Corrigé du problème :

1)

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

■ (x^2 - 36)/(x^2 + 16) → f(x)                 Done
■ -∫(f(x), x, -6, 6)      -(26·tan⁻¹(2/3) - 13·π + 12)
■ -∫(f(x), x, -6, 6)                           13.55
■ 500·-(26·tan⁻¹(2/3) - 13·π + 12)           6776.32

MAIN          RAD EXACT          FUNC 4/30
```

2)

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

■ solve(f(x) = -1.25, x)
                                x = -8/3 or x = 8/3
■ ∫(-1.25 - f(x), x, -8/3, 8/3)
                                2·(13·tan⁻¹(2/3) - 6)
■ ∫(-1.25 - f(x), x, -8/3, 8/3)               3.29
■ 500·2·(13·tan⁻¹(2/3) - 6)                1644.03

MAIN          RAD EXACT          FUNC 8/30
```

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

■ ∫(-1.25 - f(x), x, -8/3, 8/3)
                                2·(13·tan⁻¹(2/3) - 6)
■ ∫(-1.25 - f(x), x, -8/3, 8/3)               3.29
■ 500·2·(13·tan⁻¹(2/3) - 6)                1644.03
■ 1644.0338461184 / 6776.318402215            .2426

MAIN          RAD EXACT          FUNC 9/30
```

3)

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

■ d/dx(f(x)) → d1f(x)                          Done
■ solve(f(a) = d1f(a)·a - 2.25, a)
                          a = -4 or a = 0 or a = 4
■ d1f(4)                                      13/32
■ 13/32·x - 2.25 → t(x)                        Done
■ solve(t(x) = 1.5, x)                   x = 120/13

MAIN          RAD EXACT          FUNC 2/15
```

4)

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

■ solve(t(x) = 1.5, x)                   x = 9.2308
■ a·x^4 + b·x^2 + c → g(x)                     Done
■ d/dx(g(x)) → d1g(x)                          Done
■ solve(g(0) = 1.5 and d1g(0) = 0 and g(8) ▶
          a = 3/8192 and b = -3/64 and c = 3/2

MAIN          RAD EXACT          FUNC 10/30
```