# CORRIGE (B, math I, juin 2010)

## Question I

1) $z' = \dfrac{2\bar{z}-3i}{i\bar{z}-3}$ avec $z = x+yi$ ; $z \in \mathbb{C} \setminus \{3i\}$

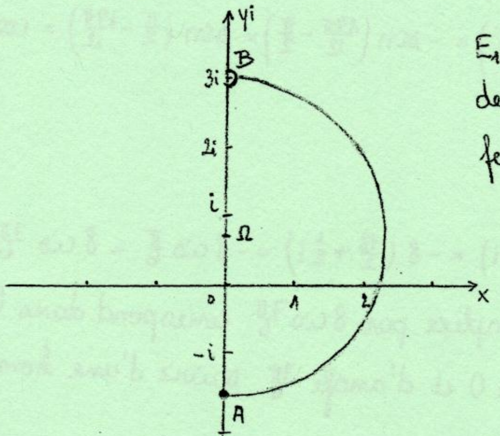
$$z' = \frac{2(x-yi)-3i}{i(x-yi)-3} = \frac{2x-2yi-3i}{y-3+ix} \cdot \frac{y-3-ix}{y-3-ix}$$

$$= \frac{\cancel{2xy} - 6x - 2x^2 i - 2y^2 i + 6yi - \cancel{2xy} - 3yi + 9i - 3x}{(y-3)^2+x^2}$$

$$= \frac{-9x + (-2x^2-2y^2+3y+9)\,i}{(y-3)^2+x^2}$$

$$z' \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{I}(z') = 0 \\ \mathcal{R}(z') \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2-2y^2+3y+9 = 0 \\ -9x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-\frac{3}{2}y-\frac{9}{2} = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2\cdot\frac{3}{4}y+\frac{9}{16} = \frac{9}{2}+\frac{9}{16} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} \\ x \geq 0 \end{cases}$$




$E_1$ est le demi-cercle ci-contre, de centre $\Omega(0, \frac{3}{4})$ et de rayon $r = \frac{9}{4}$, fermé en A et ouvert en B.

$$\arg z' \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}(z') = 0 \\ \mathcal{I}(z') > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x = 0 \\ -2x^2-2y^2+3y+9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2y^2+3y+9 > 0 \end{cases}$$

$\Delta = 9+72 = 81$

$y_1 = \dfrac{-3+9}{-4} = -\dfrac{3}{2}$ et $y_2 = \dfrac{-3-9}{-4} = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -\frac{3}{2} < y < 3 \end{cases}$$

$E_2$ est un segment de droite ouvert : $E_2 = ]AB[$

2) $z = \sqrt{4-2\sqrt{3}} - i\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

a) $z^2 = (4-2\sqrt{3}) - (4+2\sqrt{3}) - 2i\sqrt{16-12} = -4\sqrt{3} - 4i$

$z^4 = 48 - 16 + 2\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4i = 32 + 32\sqrt{3}\,i = 32\cdot(1+\sqrt{3}\,i)$ ← forme algébrique de $z^4$

$z^4 = 64\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 64 \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$ ← forme trigonométrique de $z^4$

b) Calculons les racines quatrièmes de $64 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$ :

$z_k = \sqrt[4]{64} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{4}\right)$ avec $k = 0, 1, 2, 3$

or $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2 \cdot \sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt{2}$

$z_0 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}$ $\quad \mathcal{R}(z_0) > 0$ et $\mathcal{I}(z_0) > 0$

$z_1 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{12}$ $\quad \mathcal{R}(z_1) < 0$ et $\mathcal{I}(z_1) > 0$

$z_2 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{13\pi}{12}$ $\quad \mathcal{R}(z_2) < 0$ et $\mathcal{I}(z_2) < 0$

$z_3 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{19\pi}{12}$ $\quad \mathcal{R}(z_3) > 0$ et $\mathcal{I}(z_3) < 0$

Donc $z = z_3 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{19\pi}{12}$ (1)

c) D'après (1) : $\begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \frac{19\pi}{12} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ 2\sqrt{2} \sin \frac{19\pi}{12} = -\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{19\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \\ \sin \frac{19\pi}{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{cases}$

Or $\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{19\pi}{12} - \pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{19\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{19\pi}{12}\right) = -\sin \frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

$\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{19\pi}{12} - \pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{19\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{19\pi}{12}\right) = \cos \frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

d) $A(z^2) \longrightarrow B(z^4)$

Or : $z^2 \cdot z^2 = z^4$

et $z^2 = -4\sqrt{3} - 4i = -4(\sqrt{3} + i) = -8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -8 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} = 8 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$

Multiplier un nombre complexe par $8 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$ correspond dans le plan de Gauss à une rotation de centre O et d'angle $\frac{7\pi}{6}$ suivie d'une homothétie de centre O et de rapport 8.

---

## Question II

1) a) $26^2 \cdot 10^4 = 6.760.000$

b) $20^2 \cdot 10^4 = 4.000.000$

c) $26^2 \cdot A_{10}^4 = 26^2 \cdot \frac{10!}{6!} = 3.407.040$

d) Nombre de choix pour les 2 chiffres impairs : $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$

pairs : $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$

Nombre de possibilités pour placer ces 4 chiffres : $4! = 24$

Nombre de numéros d'immatriculation possibles :

$26^2 \cdot C_5^2 \cdot C_5^2 \cdot 4! = 1.622.400$ (ou $26^2 \cdot A_5^2 \cdot A_5^2 \cdot C_4^2$)

2) 1ière expérience

Expérience aléatoire : tirer simultanément 5 cartes d'un jeu de 12 cartes

Evénement élémentaire : liste non ordonnée et sans répétition de 5 cartes

$\# \Omega = C_{12}^{5} = \frac{12!}{5!\,7!} = 792$

Tous les événements élémentaires sont équiprobables.

La variable aléatoire X est le nombre de rois obtenus ; les valeurs prises par X sont 0, 1, 2, 3 ou 4.

$P(X=0) = \frac{C_8^5}{C_{12}^5} = \frac{56}{792} = \frac{7}{99}$

$P(X=1) = \frac{C_8^4 \cdot C_4^1}{C_{12}^5} = \frac{70\cdot 4}{792} = \frac{35}{99}$

$P(X=2) = \frac{C_8^3 \cdot C_4^2}{C_{12}^5} = \frac{56\cdot 6}{792} = \frac{42}{99}$

$P(X=3) = \frac{C_8^2 \cdot C_4^3}{C_{12}^5} = \frac{28\cdot 4}{792} = \frac{14}{99}$

$P(X=4) = \frac{C_8^1 \cdot C_4^4}{C_{12}^5} = \frac{8}{792} = \frac{1}{99}$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)=p_i$ | $\frac{7}{99}$ | $\frac{35}{99}$ | $\frac{42}{99}$ | $\frac{14}{99}$ | $\frac{1}{99}$ |

Espérance mathématique : $E(X) = \sum p_i x_i = 0\cdot\frac{7}{99} + 1\cdot\frac{35}{99} + 2\cdot\frac{42}{99} + 3\cdot\frac{14}{99} + 4\cdot\frac{1}{99}$

$= \frac{35+84+42+4}{99} = \frac{165}{99} = \frac{5}{3}$

2e expérience

Expérience aléatoire : tirer une carte d'un jeu de 12 cartes, puis on la remet dans le jeu

Evénement élémentaire : roi (succès) ou autre carte (échec)

On a donc une épreuve de Bernoulli avec $p = \frac{1}{3}$ et $q = \frac{2}{3}$

On tire 5 cartes et on obtient ainsi un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire Y désigne le nombre de rois obtenus (nombre de succès)

$P(Y=y_i) = C_5^{y_i} \left(\frac{1}{3}\right)^{y_i} \left(\frac{2}{3}\right)^{5-y_i} = C_5^{y_i}\,\frac{2^{5-y_i}}{3^5}$

La loi de probabilité de Y est donc la loi binomiale de paramètres $p=\frac{1}{3}$ et $n=5$

| $y_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y=y_i)=p_i$ | $\frac{32}{243}$ | $\frac{80}{243}$ | $\frac{80}{243}$ | $\frac{40}{243}$ | $\frac{10}{243}$ | $\frac{1}{243}$ |

Espérance mathématique : $E(Y) = n\cdot p = 5\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

## Question III

1) $\Gamma_1 \equiv y = -2-\sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} = -y-2$

CE : 1) $x^2-2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 2$

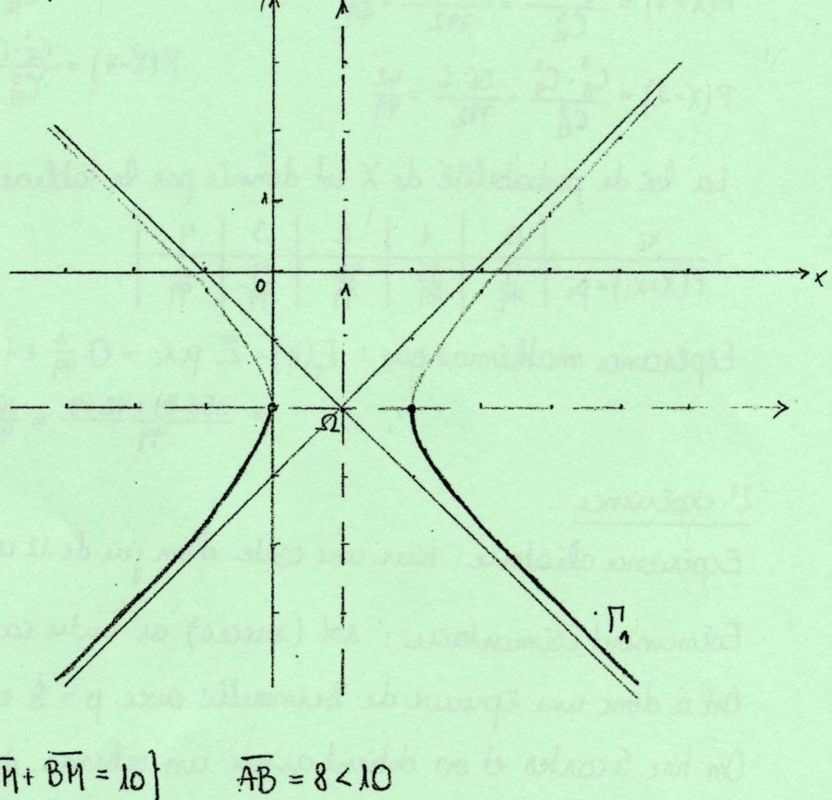
2) $-y-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant -2$

$\forall x \in ]-\infty;0] \cup [2;+\infty[, \forall y \in ]-\infty;-2]$ :

$\sqrt{x^2-2x} = -y-2 \Leftrightarrow x^2-2x = (y+2)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2-(y+2)^2 = 1 \leftarrow \mathcal{H}$

$\mathcal{H}$ est une hyperbole équilatère de centre $\Omega(1,-2)$

$\mathcal{H}$ est l'image par la translation de vecteur $\vec{u}(1,-2)$ de l'hyperbole d'équation $x^2-y^2=1$.




2) $\Gamma_2 = \{ M \in \Pi \,/\, \overline{AM}+\overline{BM} = 10 \}$ $\qquad \overline{AB} = 8 < 10$

$\Gamma_2$ est une ellipse de foyers A et B, de centre $O = \text{mil}\,[AB]$, d'axe focal $Oy$ de grand axe $2a = 10$.

Ainsi $a = 5$ et $2c = 8$ càd. $c = 4$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$ et $b = 3$

Donc $\Gamma_2 \equiv \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

3) $d \equiv x = -2$ ; $F(1,2)$ , $\varepsilon = \frac{1}{2}$ c'est une ellipse !

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \Gamma_3 &\Leftrightarrow d(M,F) = \varepsilon \cdot d(M,d) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \frac{1}{2}\cdot|x+2| \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 = \frac{1}{4}(x+2)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+(y-2)^2 = \frac{1}{4}x^2+x+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2-3x+(y-2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}(x^2-4x+4)+(y-2)^2 = 3 \quad \big| :3 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{3} = 1 \end{aligned}$$

---

## Question IV

1) $\mathbb{P} \equiv y = \frac{x^2}{2}$

a) Etablissons l'équation de la droite $MM'$ :

$M(t, y_M) \in \mathbb{P} \Leftrightarrow y_M = \frac{t^2}{2} \quad \rightarrow M(t; \frac{t^2}{2})$

$M'(-\frac{1}{t}, y_{M'}) \in \mathbb{P} \Leftrightarrow y_{M'} = \frac{1}{2t^2} \quad \rightarrow M'(-\frac{1}{t}; \frac{1}{2t^2})$

$$k_{MM'} = \frac{y_{M'}-y_M}{x_{M'}-x_M} = \frac{\frac{1}{2t^2}-\frac{t^2}{2}}{-\frac{1}{t}-t} = \frac{\frac{1-t^4}{2t^2}}{\frac{-1-t^2}{t}} = \frac{(1-t^2)(1+t^2)}{2t^2}\cdot\frac{t}{-(1+t^2)} = -\frac{1-t^2}{2t}$$

donc $MM' \equiv y = -\frac{1-t^2}{2t}x + c \quad (c \in \mathbb{R})$

$M(t, \frac{t^2}{2}) \in MM' \Leftrightarrow \frac{t^2}{2} = -\frac{1-t^2}{2t}\cdot t + c \Leftrightarrow c = \frac{t^2}{2}+\frac{1-t^2}{2} = \frac{1}{2}$

donc $MM' \equiv y = -\frac{1-t^2}{2t}x + \frac{1}{2}$

Les droites $MM'$ coupent toutes l'axe des ordonnées au point $F(0, \frac{1}{2})$.

Or : $\mathbb{P} \equiv y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y$ donc $p = 1$, l'axe focal est l'axe $Oy$ et le foyer a pour coordonnées $(0; \frac{1}{2})$

Donc les droites $MM'$ passent toutes par le foyer $F(0, \frac{1}{2})$ de la parabole.

b) $\mathbb{P} \equiv x^2 = 2y$

$t_M \equiv t\cdot x = y + \frac{t^2}{2} \Leftrightarrow y = tx - \frac{t^2}{2}$ pente : $k_{t_M} = t$

$t_{M'} \equiv -\frac{1}{t}\cdot x = y + \frac{1}{2t^2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{t}x - \frac{1}{2t^2}$ pente : $k_{t_{M'}} = -\frac{1}{t}$

On constate que $k_{t_{M'}} = -\frac{1}{k_{t_M}}$ , donc $t_M \perp t_{M'}$

c) $t_M \equiv t\cdot x - y - \frac{t^2}{2} = 0 \Leftrightarrow 2tx - 2y - t^2 = 0$ (1)

$t_{M'} \equiv \frac{1}{t}x + y + \frac{1}{2t^2} = 0 \Leftrightarrow 2tx + 2t^2 y + 1 = 0$ (2)

$(1)-(2) : -2(1+t^2)y - t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -2(1+t^2)y = 1+t^2$

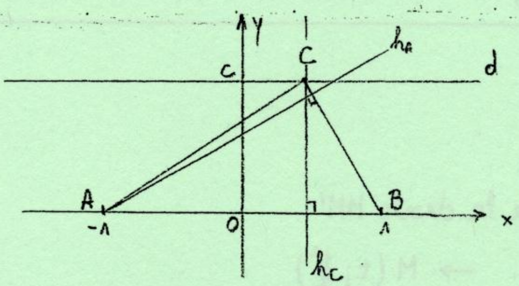
$\Leftrightarrow y = \frac{-1}{2}$

Dans (1) : $2tx + 1 - t^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$

$\mathbb{L} \equiv \begin{cases} x = \frac{t^2-1}{2t} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ , $t \in \mathbb{R}^*$

Donc $\mathbb{L} \equiv y = -\frac{1}{2}$ (droite parallèle à l'axe Ox)

2)




Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un RON tel que $O = \text{mil}[AB]$ et $A(-1;0)$, $B(1;0)$ et $C(t,c)$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $c > 0$ fixe

$h_C \equiv x = t$

Equation de $h_A$ :

$\overrightarrow{BC}(t-1, c)$

$M(x,y) \in h_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(t-1) + y \cdot c = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)x + cy + (t-1) = 0$

$h_A \equiv (t-1)x + cy + (t-1) = 0$

$M(x,y) \in \mathbb{L} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = t & (1) \\ (t-1)x + cy + (t-1) = 0 & (2) \end{cases}$

(1) dans (2) : $(x-1)x + cy + (x-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + cy + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -cy + 1$

$\Leftrightarrow x^2 = -c\left(y - \frac{1}{c}\right)$

Ainsi $\mathbb{L}$ est la parabole de sommet $S(0, \frac{1}{c})$, d'axe focal Oy.