

# Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2010

Section: C / D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

juin

## Question 1 (3 points)

$a$  et  $b$  sont deux réels strictement positifs distincts de 1.

Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ .

En déduire que  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ .

## Question 2 (9 points : 6 + 3)

- (a) Résoudre l'inéquation  $2 \ln(3-x) - \ln(x-1) \geq 2 \ln 3 - \ln(2x-1)$   
(b) Résoudre l'équation  $12e^{-3x} + 1 = e^{3x}$

## Question 3 (19 points)

On donne la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = 2 \ln^2 x - 4 \ln x$ .

- (a) Étudier la fonction  $f$  : domaines de définition, de continuité et de dérivabilité ; limites aux bornes du domaine et asymptotes ; extréma ; points d'inflexion ; tableau de variation avec indication de la concavité ; points d'intersection avec l'axe des abscisses ; représentation graphique (repère orthonormé, unité 1 cm)  
(b) Vérifier que la fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto F(x) = 2x(2 - \ln x)^2$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_0^+$ .  
(c) Trouver l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe  $Ox$  et le graphique de  $f$ .

## Question 4 (5 points)

On donne la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^{\sqrt{x}}$ .

- (a) Trouver le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction  $f$ .  
(b) Trouver  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

## Question 5 (9 points : 3 + 6)

- (a) Calculer  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin 2x}{(3 - 2 \cos^2 x)^2} dx$ .

- (b) On donne la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_0$  par  $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x^3 + x}$ .

Trouver  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}_0 \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$ .

Trouver sur un intervalle  $I$  à préciser l'expression de la primitive  $F$  de  $f$  qui prend la valeur  $\frac{\pi}{2}$  en  $-1$ .

Examen de fin d'études secondaires 2010

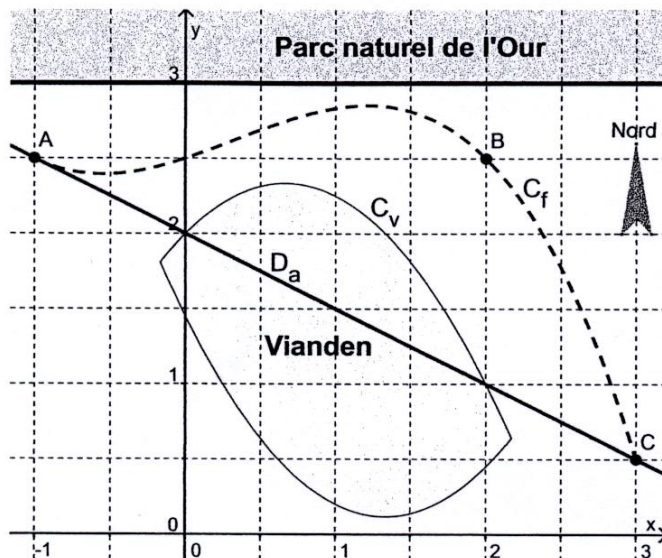
Section : C, D

Branche : Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat  
\_\_\_\_\_

## Contournement

La ville de Vianden est actuellement traversée par la route nationale toute droite décrite par la droite  $D_a$  dans le graphique ci-dessous. Un contournement décrit par la courbe  $C_f$  est planifié.



Les données indiquées sur le graphique sont exprimées en km.

- Déterminer à l'aide du graphique l'expression de la fonction affine  $a$  qui représente l'ancienne route nationale traversant Vianden.
- Le contournement indiqué par la courbe  $C_f$  doit passer par les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Au point  $A$  le contournement doit avoir la même direction que l'ancienne route. Au point  $C$  la nouvelle route peut rejoindre l'ancienne route sous un angle quelconque. La fonction  $f$  est une fonction polynôme du troisième degré. Exprimer les différentes conditions et donner l'expression de  $f(x)$  sur l'intervalle  $[-1; 3]$  ( dans la suite on prend :  $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}$  ).
- Donner le point d'inflexion de la courbe  $C_f$  et une équation cartésienne de la tangente  $t$  en ce point.
- Au Nord de Vianden se trouve le parc naturel de l'Our dont le bord du sud est donné par la droite  $d \equiv y = 3$ . Le Ministère de l'environnement exige que la route respecte une distance minimale de 100 m du parc naturel. Est-ce le cas ? Quelle est la distance minimale  $d_m$  entre la nouvelle route et le parc naturel ?
- La zone située entre l'ancienne route et la nouvelle route, et bien sûr située à l'extérieur de la ville de Vianden, est aménagée comme zone artisanale. Donner l'aire  $\mathcal{A}$  de cette zone, sachant que le bord de la partie nord de la ville de Vianden est donné par l'expression :

$$v(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x + 2.$$

Le terrain de la zone artisanale est mis en vente au prix de 15 €/m<sup>2</sup>.

Quel est le prix de vente total  $P$  de ce terrain ?