Corrigé – MATH I – C – juin 2010

I 1 • Soit bi ($b \in \mathbb{R}$) la racine imaginaire pure, alors :

$$(bi)^3 + (1+i)(bi)^2 + (7+8i)bi - 15 + 3i = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^3 i + (1+i)(-b^2) + 7bi - 8b - 15 + 3i = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^3 i - b^2 - b^2 i + 7bi - 8b - 15 + 3i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^3 - b^2 + 7b + 3 = 0 & (1) \text{ (partie imaginaire)} \\ -b^2 - 8b - 15 = 0 & (2) \text{ (partie réelle)} \end{cases}$$

(2) : $b^2 + 8b + 15 = 0$, $\Delta = 64 - 60 = 4$, $b' = \frac{-8+2}{2} = -3$, $b'' = \frac{-8-2}{2} = -5$

$\rightarrow$ (1) : $-(-3)^3 - (-3)^2 + 7\cdot(-3) + 3 = 27 - 9 - 21 + 3 \overset{!}{=} 0$, donc $\underline{-3i \in S}$

•

	1	$1+i$	$7+8i$	$-15+3i$
$-3i$		$-3i$	$-3i-6$	$-3i+15$
	1	$1-2i$	$1+5i$	0

D'où : (E) $\Leftrightarrow z = -3i$ ou $z^2 + (1-2i)z + 1 + 5i = 0$

* $\Delta = (1-2i)^2 - 4(1+5i) = 1 - 4i - 4 - 4 - 20i$
$= -7 - 24i$

* cherchons une r.c.c. δ de Δ :

$|\Delta| = \sqrt{49 + 24^2} = 25$

$\delta = \sqrt{\frac{25-7}{2}} - i\sqrt{\frac{25+7}{2}} = 3 - i\,4$

* $z' = \frac{-1+2i+3-4i}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$

$z'' = \frac{-1+2i-3+4i}{2} = \frac{-4+6i}{2} = -2 + 3i$

$S = \{-3i\,;\ 1-i\,;\ -2+3i\}$

2 • $z_1 = \frac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i} \cdot \frac{\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}-2i} = \frac{9 - 6\sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 2}{3+4} = \frac{7 - 7\sqrt{3}i}{7} = 1 - \sqrt{3}i$ (forme algébrique)

• $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \tfrac{1}{2} = \cos\tfrac{\pi}{3} = \cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) \\ \sin\varphi_1 &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\tfrac{\pi}{3} = \sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$$

forme trigonométrique : $z_1 = 2\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \left(= 2e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)$

• $$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2010} = \left(\frac{2\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{2010} = \left(\sqrt{2}\cdot\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2010} = 2^{\frac{2010}{2}}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\cdot 2010\right)$$

$$= 2^{1005}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{335}{2}\pi\right) = 2^{1005}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \cancel{168\pi}\right) = \underline{2^{1005}\, i}$$

II 1) i. solution unique $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 3 & 2m \\ m & 2m & 1 \end{vmatrix} = 3 + \cancel{4m^2} + 2m^2 - 3m^2 - \cancel{4m^2} - 2 = 1 - m^2$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -1$

Conclusion: le système admet 1 solution pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

ii. pour $m=-1$ le système devient: $\begin{cases} x+2y-z=2 & (1) \\ x+3y-2z=-1 & (2) \\ -x-2y+z=2 & (3) \end{cases}$

(1)+(3): $0=4$ impossible donc $S=\emptyset$

int. géom.: Les 3 équations représentent 3 plans de l'espace qui n'ont aucun point commun.

[Plus précisément: (1) et (3) représentent 2 plans strictement parallèles car les v. normaux $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires et (2) représente un plan sécant aux deux autres car son v. normal $\vec{n}_3\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_3$.]

iii. pour $m=1$ le système devient: $\begin{cases} x+2y+z=2 & (1) \\ x+3y+2z=1 & (2) \\ x+2y+z=2 & (3)=(1) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x = 2-2y-z$

$\rightarrow (2)$: $2-2y-z+3y+2z=1 \Leftrightarrow y+z=-1 \Leftrightarrow y=-1-z$

donc $x = 2+2+2z-z = 4+z$

$S = \{(4+z; -1-z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ (une infinité de sol.)

int. géom. (1) et (3) représent un même plan dans l'espace qui se coupe avec le plan représenté par (2) en une droite d d'éq. paramétriques:

$$d \equiv \begin{cases} x = 4+k \\ y = -1-k \\ z = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$A(4,-1,0) \in d$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ = vect. directeur de d

2 i. A, B, C alignés $\Leftrightarrow \vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ colinéaires

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} -2 = -3k \\ -1 = k \\ 1 = k \cdot 0 \end{cases}$) impos.

donc A, B, C ne sont pas alignés

ii. $M(x,y,z) \in \Pi_1 \Leftrightarrow \vec{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix}$ = comb. linéaire de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -3 \\ y & -1 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 0 - 2(z-1) - 3y - 3(z-1) - (x-2) - 0 = 0$

$\Leftrightarrow -2z + 2 - 3y - 3z + 3 - x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow -x - 3y - 5z + 7 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x + 3y + 5z - 7 = 0 \equiv \Pi_1}$

iii. $M(x,y,z) \in (AB) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\ \vec{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix} = k \cdot \vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$

D'où $(AB) \equiv \begin{cases} x = 2 - 2k & (1) \\ y = -k & (2) \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + k & (3) \end{cases}$ syst. d'éq. param. de (AB)

$(2) \Leftrightarrow k = -y$

$\rightarrow (1)$: $x = 2 + 2y \Leftrightarrow x - 2y - 2 = 0$

$\rightarrow (3)$: $z = 1 - y \Leftrightarrow y + z - 1 = 0$

D'où $(AB) \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$ syst. d'éq. cartés. de (AB)

iv. $\vec{AB}$ = vect. dir. de (AB) = vect. normal à Π_2 car $(AB) \perp \Pi_2$

$M(x,y,z) \in \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{CM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-1\end{pmatrix} \perp \vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (x+1)(-2) + (y-1)(-1) + (z-1)\cdot 1 = 0$

$\Leftrightarrow -2x - 2 - y + 1 + z - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{-2x - y + z - 2 = 0 \equiv \Pi_2}$

III 1 $$\left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{x^3}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} C_9^k \left(\frac{x^2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right)^{9-k} = \sum_{k=0}^{9} C_9^k \frac{x^{2k}}{3^k} \frac{2^{9-k}}{x^{27-3k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{9} C_9^k \frac{2^{9-k}}{3^k} \cdot x^{5k-27}$$

$5k - 27 = 8 \iff k = 7$

terme en x^8 : $C_9^7 \frac{2^2}{3^7} x^8 = \frac{16}{243} x^8$

2 i.) Nombre d'équipes possibles (tirages sans ordre et sans remise) $= C_{12}^5 = 792$

ii) Nombre d'équipes avec 1 Américain (C_2^1), 1 U.E. (C_3^1) et 3 Luxembourgeois (C_7^3) $= C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_7^3 = 2 \cdot 3 \cdot 35 = 210$

iii) Nombre d'équipes avec:

- 5 Lux. : $C_7^5 = 21$
- 4 Lux + 1 Am. : $C_2^1 \cdot C_7^4 = 70$
- 4 Lux + 1 U.E. : $C_3^1 \cdot C_7^4 = 105$
- 3 Lux. + 1 Am + 1 U.E. : 210 (voir ii)

Nombre d'équipes contenant au plus 1 A. et au plus 1 U.E $= 21 + 70 + 105 + 210 = 406$

iv) Nombre d'équipes avec:

- 2 Am. + 3 Lux. : $C_2^2 \cdot C_7^3 = 35$
- 2 U.E. + 3 Lux. : $C_3^2 \cdot C_7^3 = 105$

Nombre d'équipes demandé $= 35 + 105 = 140$

v) Nombre de façons de distribuer les tricots = nombre de tirages avec ordre et sans remise de 12 tricots parmi 24 $= A_{24}^{12} = \frac{24!}{12!} \simeq 1{,}29 \cdot 10^{15}$