Corrigé

Question I (20 (11+9) points)

1.
$$\begin{aligned} P(-5i) &= 125i+(4-i)\cdot(-25)+32(1+i)(-5i)-60+10i \\ &= 125i-100+25i-160i+160-60+10i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $-5i$ est une racine de P.

Schéma de Hörner:

	1	$4-i$	$32+32i$	$-60+10i$
$-5i$		$-5i$	$-30-20i$	$60-10i$
	1	$4-6i$	$2+12i$	0

$P(z)=0 \Leftrightarrow z=-5i$ ou $z^2+(4-6i)z+2+12i=0$.

$\Delta=(4-6i)^2-4\cdot(2+12i)=-28-96i$.

Soit $\delta=x+iy$ une racine carrée de $-28-96i$. Alors

$$\begin{cases} x^2+y^2=\left|-28-96i\right|=100 & (1) \\ x^2-y^2=-28 & (2) \\ 2xy=-96<0 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2)\Rightarrow x=\pm 6$; $(1)-(2)\Rightarrow y=\pm 8$; de (3), x et y sont de signes contraires.

$\delta=\pm(6-8i)$.

Les solutions du trinôme du second degré sont

$$\frac{-4+6i\pm(6-8i)}{2}=\begin{cases}1-i \\ -5+7i\end{cases}$$

$S=\{-5i;1-i;-5+7i\}$

2. a. $z_1=2cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $Z=\left(2\cdot 4^2\right)cis\left(-\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{3}\right)=32cis\frac{5\pi}{12}$.

b. $z_2^2=16cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-8+8\sqrt{3}i$ et

$$Z=\sqrt{2}(1-i)\cdot 8\left(-1+\sqrt{3}i\right)=\left(8\sqrt{6}-8\sqrt{2}\right)+\left(8\sqrt{6}+8\sqrt{2}\right)i$$

c. $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{8\sqrt{6}-8\sqrt{2}}{32}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et

$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}$.

Question II (20 (10+10) points)

1. a.

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -3 & m \\ 4 & -6 & 1 \\ -2 & m & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \\ -2 & m \end{matrix}$$

$$=-24+6+4m^2-12m-2m+24$$

$$=4m^2-14m+6=2(m-3)(2m-1)$$

Le système admet une solution unique ssi

$$\det A\neq 0 \Leftrightarrow m\in IR-\left\{3;\frac{1}{2}\right\}.$$

b. Si $m=\frac{1}{2}$, alors

$$(s)\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2} \\ 4x-6y+z=1 \\ -2x+\frac{1}{2}y+2z=1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{(1)\cdot 2 \\ (3)\cdot 2}}{\Leftrightarrow}\begin{cases} 4x-6y+z=1 \\ 4x-6y+z=1 \\ -4x+y+4z=2 \end{cases}$$

Les deux premières équations étant équivalentes, le système (s) se réduit à $\begin{cases} 4x-6y+z=1 \\ -4x+y+4z=2 \end{cases}\underset{(2)/(2)+(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases} 4x-6y+z=1 \\ -5y+5z=3 \end{cases}$.

On pose $y=\alpha$. Alors $z=\frac{3}{5}+\alpha$ et $x=\frac{1}{10}+\frac{5}{4}\alpha$.

$$S=\left\{\left(\frac{1}{10}+\frac{5}{4}\alpha;\alpha;\frac{3}{5}+\alpha\right)/\alpha\in IR\right\}.$$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans se coupant suivant une droite passant par le point $A\left(\frac{1}{10};0;\frac{3}{5}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{5}{4};1;1\right)$.

2. a. Le point A n'appartient pas à la droite d car la deuxième équation n'est pas vérifiée $(1-4=-3\neq 0)$.

   b. Posons $z=\beta$. Alors $x=2\beta$ et $y=\beta-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}$.

   Un système d'équations paramétriques de d est

$$d\equiv\begin{cases}x=2\beta\\ y=\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\\ z=\beta\end{cases}\text{ avec } \beta\in IR.$$

   On en déduit un vecteur directeur de d qui est aussi un vecteur directeur de d' : $\vec{v}\left(2;\frac{1}{2};1\right)$.

$$\text{Donc } d'\equiv\begin{cases}x=2\beta+1\\ y=\frac{1}{2}\beta+1\\ z=\beta+2\end{cases}\text{ avec } \beta\in IR.$$

   c. Pour $\beta=1$: $B(2;0;1)\in d$ et pour $\beta=-1$: $C(-2;-1;-1)\in d$.

$$X(x;y;z)\in\alpha\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & 1 & -3\\ y-1 & -1 & -2\\ z-2 & -1 & -3\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x+6y-5z+3=0.$$

   $\alpha\equiv x+6y-5z+3=0$.

<u>Question III (20 (4+6+6+4) points)</u>

1. a. Tout se passe comme si on devait remplir 8 cases avec 0 ou 1 à chaque case. Il y a donc $2^8=256$ octets possibles.

   b. Les première et dernière cases sont remplies par 0, pour les autres, on a encore deux choix : 0 ou 1. Il y a donc $2^6=64$ octets possibles.

   c. On choisit les quatre cases où l'on met 1. On met 0 dans les autres. Il y a donc $C_8^4=70$ octets possibles.

2. a. Tous les chemins pour se rendre de A vers B comportent 4 descentes verticales et 9 sentiers vers la droite, donc 13 sentiers en tout. Le nombre de chemins est donc le nombre de choix pour placer une descente verticale c'est-à-dire $C_{13}^4=715$ possibilités.

   b. Le nombre de chemins pour aller de A vers C vaut $C_7^1=7$.
   Le nombre de chemins pour aller de C vers B vaut $C_6^3=20$.
   Pour chaque chemin allant de A vers C, il y a 20 chemins pour aller de C vers B. Donc le nombre de chemins passant par C vaut $7\cdot 20=140$. $P(\textit{passer par } C)=\frac{140}{715}=\frac{28}{143}\approx 19{,}6\%$.

3. a. Il y a en tout $12!=479001600$ classements possibles.

   b. Il y a $A_8^3=336$ arrivées possibles des 3 premiers.

4.

$$\left(5x^2-\frac{3}{x^3}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}C_6^k\cdot\left(5x^2\right)^{6-k}\cdot\left(-\frac{3}{x^3}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{6}(-1)^k\cdot C_6^k\cdot 5^{6-k}\cdot 3^k\cdot x^{12-5k}$$

Le degré est -3 ssi $12-5k=-3$ ssi $k=3$.
Le terme cherché est $-1\cdot C_6^3\cdot 5^3\cdot 3^3\cdot x^{-3}=-67500x^{-3}$.