I $z^3+(3+8i)z+16+2i=0$ ($\Leftrightarrow P(z)=0$) (*)

Soit $z=bi$ ($b\in\mathbb{R}$) la solution imaginaire pure :

$-ib^3+(3+8i)bi+16+2i=0 \Leftrightarrow -b^3i+3bi-8b+16+2i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-8b+16=0 & (1)\\ -b^3+3b+2=0 & (2)\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow b=2$

$\rightarrow(2)$: $-2^3+3\cdot 6+2\overset{!}{=}0$

donc $\underline{2i\in S}$ et $P(z)$ est divisible par $z-2i$:

	1	0	$3+8i$	$16+2i$
$2i$		$2i$	-4	$-2i-16$
	1	$2i$	$-1+8i$	0

(*) $\Leftrightarrow z=2i$ ou $z^2+2iz-1+8i=0$

• $\Delta=(2i)^2-4(-1+8i)=-4+4-32i=-32i$

• δ racine de Δ :

$|\Delta|=32$

$\delta=\sqrt{\frac{32+0}{2}}-i\sqrt{\frac{32-0}{2}}=4-i4$

• $z'=\frac{-2i+4-4i}{2}=\frac{4-6i}{2}=2-3i$

$z''=\frac{-2i-4+4i}{2}=\frac{-4+2i}{2}=-2+i$

$S=\{2i,2-3i,-2+i\}$

II 1) • $z_1=\frac{(2+i)(13-9i)\sqrt2}{5(-1+3i)^2}=\frac{(26-18i+13i+9)\sqrt2}{5(1-6i-9)}=\frac{\overset{7-i}{\cancel{(35-5i)}}\sqrt2}{\cancel{5}(-8-6i)}\cdot\frac{-8+6i}{-8+6i}$

$=\frac{(-56+42i+8i+6)\sqrt2}{64+36}=\frac{(-50+50i)\sqrt2}{100}=\frac{(-1+i)\sqrt2}{2}=\underline{-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i=z_1}$

$|z_1|=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=1$

$\begin{cases}\cos\varphi_1=-\frac{\sqrt2}{2}=-\cos\frac{\pi}{4}=\cos(\pi-\frac{\pi}{4})\\ \sin\varphi_1=\frac{\sqrt2}{2}=\sin\frac{\pi}{4}=\sin(\pi-\frac{\pi}{4})\end{cases}$ donc $\varphi_1=\frac{3\pi}{4}$ et $\underline{z_1=\ \operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}}$

• $z_2=\frac{[-2\sqrt3+3+(3\sqrt3+2)i](3-2i)}{13}=\frac{\cancel{-6\sqrt3}+9+(9\sqrt3+6)i+(4\sqrt3-6)i+\cancel{6\sqrt3}+4}{13}$

$=\frac{13+(9\sqrt3\cancel{+6}+4\sqrt3\cancel{-6})i}{13}=\frac{13+13\sqrt3 i}{13}=\underline{1+\sqrt3 i=z_2}$

$|z_2|=\sqrt{1+3}=2$

$\begin{cases}\cos\varphi_2=\frac12=\cos\frac{\pi}{3}\\ \sin\varphi_2=\frac{\sqrt3}{2}=\sin\frac{\pi}{3}\end{cases}$ donc $\varphi_2=\frac{\pi}{3}$ et $\underline{z_2=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}$

2) $Z = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}{1+\sqrt{3}i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\dfrac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{-1+\sqrt{3}i+i+\sqrt{3}}{1+3}$

$\underline{Z = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\left((\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)\right)}$ (*)

$Z = \dfrac{\text{cis}\,\frac{3\pi}{4}}{2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}\,\text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}\right) = \underline{\dfrac{1}{2}\,\text{cis}\,\dfrac{5\pi}{12} = Z}$ (**)

3) (*) = (**) : $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}-1) = \frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{12} \;\; |\cdot 2 \iff \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}+1) = \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{12} \;\; |\cdot 2 \iff \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

D'où $\tan\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \dfrac{6+2\sqrt{12}+2}{6-2} = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{4}$

$\underline{\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}}$

<u>III</u> $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & m \\ 1 & -m & 3 \end{vmatrix} = 6+\cancel{m}-\cancel{m}-1-2m^2+3 = -2m^2+8$
$= -2(m^2-4)$
$= -2(m-2)(m+2)$

$\Delta = 0 \iff m^2 = 4 \iff m=-2$ ou $m=2$

<u>1er cas</u> : $\Delta \neq 0 \to 1$ solution

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & m \\ 2 & -m & 3 \end{vmatrix} = -3+2m+3m-2+m^2-9 = m^2+5m-14$

$\Delta' = 25+56 = 81$
$m' = \dfrac{-5+9}{2} = 2$
$m'' = \dfrac{-5-9}{2} = -7$

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\cancel{(m-2)}(m+7)}{-2\cancel{(m-2)}(m+2)} = \dfrac{m+7}{-2(m+2)}$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & m \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18+m+2+3+4m+3 = 5m-10 = 5(m-2)$

$y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{5\cancel{(m-2)}}{-2\cancel{(m-2)}(m+2)} = -\dfrac{5}{2(m+2)}$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -m & 2 \end{vmatrix} = 4+3+m+1-6m+2 = -5m+10 = -5(m-2)$

$z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{-5\cancel{(m-2)}}{-2\cancel{(m-2)}(m+2)} = \dfrac{5}{2(m+2)}$

$S = \left\{\left(\dfrac{m+7}{-2(m+2)} ; -\dfrac{5}{2(m+2)} ; \dfrac{5}{2(m+2)}\right)\right\}$

<u>2e cas</u> : $m=2$ ($\Delta = 0 \to 0$ ou une infinité de sol.)

$\begin{cases} -2x+y-z = 1 & (1) \\ -x-y+2z = 3 & (2) \\ x-2y+3z = 2 & (3) \end{cases}$

$(1)+(2): -3x+z=4 \Leftrightarrow z=4+3x \quad (4)$

$(3)-2\cdot(2): 3x-z=-4 \Leftrightarrow z=4+3x \quad (4)$

$(4)\to(1): -2x+y-4-3x=1 \Leftrightarrow y=5x+5$

$S=\{(x, 5x+5, 3x+4) \mid x\in\mathbb{R}\}$

posons $x=\alpha$ alors S est représenté par la droite d'éq. param.:

$d\equiv\begin{cases} x=\alpha \\ y=5\alpha+5 \\ z=3\alpha+4 \end{cases}$ d passe par $A(0,5,4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$ = vect. dir. de d

$(\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=d)$

3e cas: $m=-2$ ($\Delta=0 \to 0$ ou une infinité de sol.)

$\begin{cases} -2x+y-z=1 & (1) \\ -x-y-2z=3 & (2) \\ x+2y+3z=2 & (3) \end{cases}$

$(1)+(2): -3x-3z=4 \mid :(-3) \Leftrightarrow x+z=-\frac{4}{3}$

$(3)-2\cdot(1): 5x+5z=0 \mid :5 \Leftrightarrow x+z=0$ } impos. donc $S=\emptyset$

Les 3 éq. représentent 3 plans qui n'ont aucun point commun (π_1, π_2, π_3 parallèles mais pas confondus)

IV 1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AB}=\alpha\cdot\vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=2\alpha \\ -1=\alpha \\ 1=0 \end{cases}$ imp. donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont 2 vecteurs dir. non colin. de P

$M(x,y,z)\in P \Leftrightarrow \vec{AM}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+1\\y-2\\z-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\-\alpha\\\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\beta\\\beta\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+\alpha+2\beta \\ y=2-\alpha+\beta \\ z=1+\alpha \end{cases}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ syst. d'éq. param. de P

$M(x,y,z)\in P \Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y-2 & -1 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow z-1+2(y-2)+2(z-1)-(x+1)=0$

$\Leftrightarrow 3z-3+2y-4-x-1=0$

$\Leftrightarrow -x+2y+3z-8=0 \equiv P$ (éq. cart. de P)

2) $M(x,y,z) \in CD \Leftrightarrow \vec{CM} = k \cdot \vec{CD} \quad (k \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z-1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + k & (1) \\ y = 3 - 2k & (2) \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - k & (3) \end{cases}$$ syst. d'éq. param. de CD

$(1) \Leftrightarrow k = x - 1$

$\rightarrow (2): \; y = 3 - 2x + 2 \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$

$\rightarrow (3): \; z = 1 - x + 1 \Leftrightarrow x + z - 2 = 0$

$$d \equiv \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$ syst. d'éq. cart. de d

3) $A \in d \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 2 - 5 = 0 \\ \text{et} \\ -1 + 1 - 2 = 0 \end{cases}$ faux donc $A \notin d$

4) $M(x,y,z) \in p \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z - 8 = 0 \\ y = z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -8$

D'où $p \cap (Ox) = \{B(-8, 0, 0)\}$