Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2012

Section: C et D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

septembre

Question I (14 (3+3+3+5) points)

1. Démontrer : *Si f est continue sur $[a;b]$, F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors, pour tout x de* $[a;b]$, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

   En particulier : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, *noté* $[F(t)]_a^b$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_3(2^x - 3)}{x}$
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{5}{x}\right)^{2+x}$
4. Résoudre : $2\ln(x+1) \leq \ln(x^3 + 1) - \ln x$

Question II (18 (13+5) points)

Soit la fonction $f : IR \to IR : x \to 5 - 5x^2e^x$.

1. Faire l'étude complète de f :
   - domaine de définition,
   - limites aux bornes du domaine et asymptotes
   - dérivée et extrema
   - concavité de la courbe et points d'inflexion
   - tableau récapitulatif complet
   - représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 1cm.
2. Calculer l'aire A_λ de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de *f*, la droite horizontale d'équation $y = 5$ et les deux droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$ avec $\lambda < 0$. Calculer la limite de A_λ si λ tend vers $-\infty$.

Question III (13 ((4+5)+(2+2)) points)

1. Calculer les intégrales suivantes :
   a. $\int_0^1 \dfrac{1-3x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

   b. $\int_0^1 (x^2 - 5)\cos(\pi x)dx$
2. On considère la fonction *f* définie sur dom*f*= $IR - \{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{5x^3 - 3x^2 + 5x + 5}{x^4 - 1}$.

   a. Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que pour tout $x \in$ dom*f* : $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x^2+1}$.

   b. Déterminer la primitive *F* de *f* sur un intervalle *I* à préciser qui prend la valeur 2 en 0.

Epreuve écrite

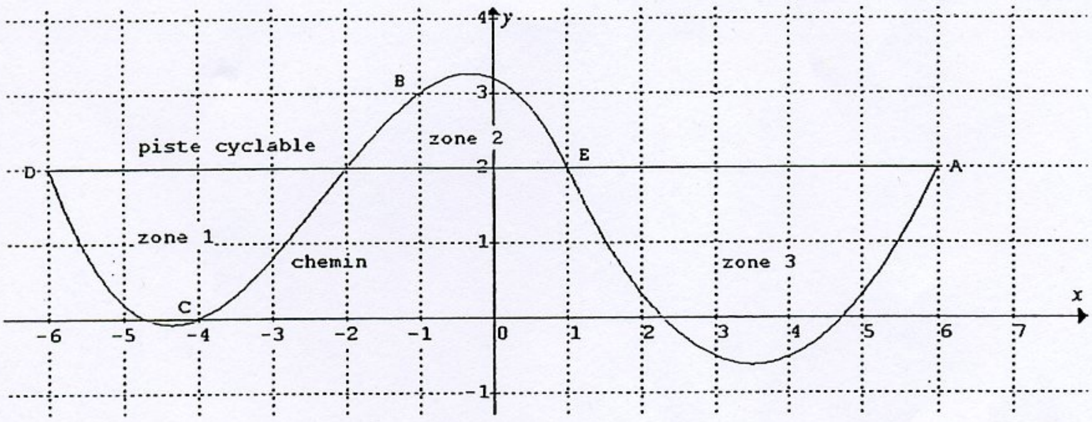
Examen de fin d'études secondaires 2012 Section: C et D Branche: **Mathématiques 2**	Numéro d'ordre du candidat septembre

Problème $((1+2+1+3)+2+3+3=15$ points$)$

Une ville décide de construire un chemin de promenade dont les points de départ D et d'arrivée A doivent se trouver sur une piste cyclable déjà existante, rectiligne et longue de 12 km.

Dans le repère orthonormé ci-dessous d'unité 1 km, la piste cyclable passe par les points D(-6 ; 2) et A (6 ; 2).

En plus des points D et A, le chemin doit également passer par C (-4 ;0), B (-1 ;3) et E (1 ;2).



1) Entre les points D et E le chemin doit suivre la courbe d'une fonction polynôme du 3$^{\text{ème}}$ degré notée f(x).

   a) Déterminer l'expression de f(x).

   b) En quel point entre D et E le chemin admet-il un point d'inflexion ?

   c) En quel point entre D et E le chemin traverse-t-il la piste cyclable ?

   d) Sur le chemin entre D et E, à quelle distance maximale de la piste cyclable se trouve-t-on ?

2) Entre les points E et A le chemin doit suivre la courbe d'une fonction polynôme du 2$^{\text{ième}}$ degré notée g(x). Déterminer l'expression de g(x) sachant qu'au point E cette partie du chemin débouche tangentiellement dans l'autre partie du chemin.

3) Quelle est à 1m près la longueur totale du chemin entre D et A ?

4) La ville veut défricher les trois zones situées entre la piste cyclable et le chemin de promenade. Sachant qu'elle a un budget de 15 millions d'euros pour réaliser ces travaux, peut-elle accepter le devis d'une entreprise qui lui propose un défrichage à 1 € / m² ?

Rappel : pour une fonction f dérivable, la longueur de la partie de la courbe C_f allant du point d'abscisse x_1 au point d'abscisse x_2 est donnée par la formule $L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$