

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2013

Section : B

Branche : Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

Question 1 (4+6+6 = 16 points)

Résolvez, en donnant des valeurs exactes, dans \mathbb{R} , l'équation et les inéquations suivantes :

a)
$$\frac{4^x - 3 \cdot 2^x + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1} = \frac{1}{2}$$

b)
$$\ln(x+1) - \frac{\ln|x^2-1|}{2} \leq \ln(\sqrt{2})$$

c)
$$\left[2e^x \ln(3x)\right]^2 + 4 < 16e^{2x} + \ln^2(3x)$$

Question 2 (6+4 = 10 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(3x) - 2x^2 + 3x + 2$ et C_f sa courbe représentative dans un R.o.n.

- a) Étudiez la fonction f : dom f , limites aux bornes de dom f , $f'(x)$, tableau des variations (valeurs exactes des extremums éventuels) et déduisez-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- b) Montrez que C_f admet une seule tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$ et déterminez la valeur arrondie à 0,001 près de l'ordonnée du point d'intersection de cette tangente avec (Oy) .

Question 3 (8+7 = 15 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$ et C_f sa courbe représentative dans un R.o.n.

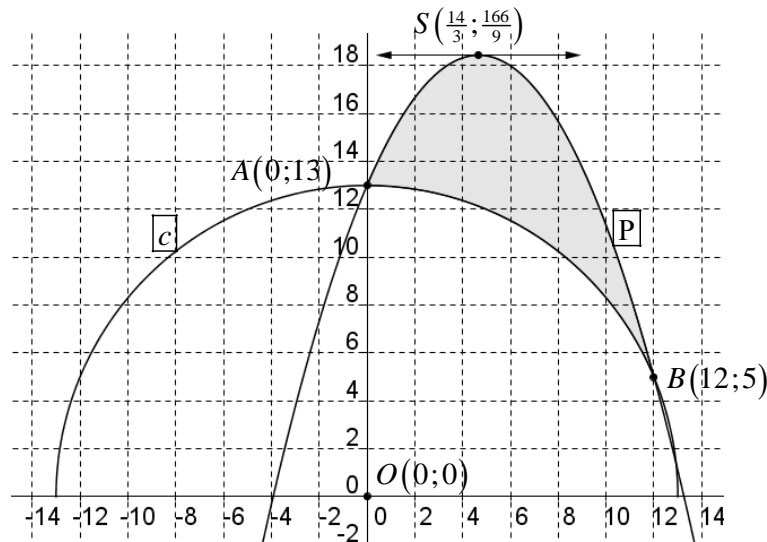
- a) Étudiez la fonction f : dom f , limites aux bornes de dom f , asymptotes horizontales, verticales, obliques et branches paraboliques éventuelles, $f'(x)$, tableau des variations (valeurs exactes des extremums éventuels) et représentation graphique (unité 3 cm).
- b) Résolvez l'équation $f(x) = 0$ et déterminez la valeur exacte de l'aire de la surface délimitée par C_f et (Ox) .

[Indication : Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{x^2 - 2x - 1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$]

Question 4 (4+7 = 11 points)

La parabole P de sommet $S\left(\frac{14}{3}; \frac{166}{9}\right)$ passant par le point $A(0;13)$ coupe le demi-cercle c de centre $O(0;0)$ de rayon 13 situé dans le demi-plan d'équation $y \geq 0$ au point B .

- a) Montrez que $P : y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{3}x + 13$ et vérifiez à l'aide de calculs que $B(12;5)$ appartient à P et à c .
- b) Calculez la valeur exacte de l'aire de la surface délimitée par la parabole P et l'arc \widehat{AB} du demi-cercle c (voir figure ci-dessous).



Question 5 (8 points)

Un flotteur (Schwimmer) a la forme d'un solide de révolution engendré par la rotation autour de (Ox) de la surface délimitée par (Ox) et la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par

$$f(x) = \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \text{ . (voir figure ci-dessous)}$$

Déterminez la valeur exacte du volume du flotteur en cm^3 sachant que l'unité est le cm .

