Examen de fin d'études secondaires 2013 – Mathématiques II (sections C et D) – Corrigé

Exercice 1 **(3+3=6 points)**

1) Démontrer que $(\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}), (\forall x \in]0; +\infty[)$: $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[)$, soit : $y = \log_a(x)$. Alors :

$\log_a(x) = y$

$\Leftrightarrow x = a^y$ *($\exp_a$ est la bijection réciproque de $\log_a$)*

$\Leftrightarrow \log_b(x) = \log_b(a^y)$

$\Leftrightarrow \log_b(x) = y \cdot \log_b(a)$ *(logarithme d'une puissance)*

$\Leftrightarrow \log_b(x) = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$

$\Leftrightarrow \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

3p

2) Calculer, en justifiant, la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{4x}\right)^{1-2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{4x}\right)^{1-2x}$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1-2\cdot\left(-\frac{3t}{4}\right)}$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1+\frac{3t}{2}}$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{3t}{2}}\right]$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1}\cdot\lim_{t\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{3}{2}}$$
$$= 1\cdot e^{\frac{3}{2}}$$
$$= \sqrt{e^3}$$
$$= e\sqrt{e}$$

Posons :

$\dfrac{1}{t} = -\dfrac{3}{4x} \Leftrightarrow 4x = -3t \Leftrightarrow x = -\dfrac{3t}{4}$

Si $x \to +\infty$, alors $t \to -\infty$.

3p

Exercice 2 **(6+6=12 points)**

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\log_3(2-x) - \log_9(9-x^2) \leq \log_3(\sqrt{3})$

__Conditions d'existence :__

- $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in D_1 =]-\infty; 2[$
- $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x) > 0 \Leftrightarrow x \in D_2 =]-3; 3[$

Domaine :

$D = D_1 \cap D_2 =]-3; 2[$ 1p

$(\forall x \in D)$:

$\log_3(2-x) - \log_9(9-x^2) \leq \log_3(\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(2-x)}{\ln(3)} - \frac{\ln(9-x^2)}{2\ln(3)} \leq \frac{\ln(\sqrt{3})}{\ln(3)} \quad |\cdot 2\ln(3) > 0$

$\Leftrightarrow 2\ln(2-x) - \ln(9-x^2) \leq 2\ln(\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \ln((2-x)^2) \leq \ln\left(\sqrt{3}^2\right) + \ln(9-x^2)$

$\Leftrightarrow \ln((2-x)^2) \leq \ln[3\cdot(9-x^2)]$

$\Leftrightarrow (2-x)^2 \leq 3\cdot(9-x^2)$ **(car ln bij. ↗)**

$\Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 \leq 27 - 3x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 23 \leq 0 \quad (I)$ 3p

Résolvons :

$4x^2 - 4x - 23 = 0 \quad \Delta = 16 - 4\cdot 4\cdot(-23) = 16 + 368 = 384 = (8\sqrt{6})^2$

$\Leftrightarrow x = \frac{4-8\sqrt{6}}{8}$ ou $x = \frac{4+8\sqrt{6}}{8}$

$\Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{1}{2} - \sqrt{6}}_{\approx -1,95}$ ou $x = \underbrace{\frac{1}{2} + \sqrt{6}}_{\approx 2,95}$ 1p

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}-\sqrt{6}$		$\frac{1}{2}+\sqrt{6}$		$+\infty$
$4x^2-4x-23$		+	0	−	0	+	

Donc :

$S_{(I)} = \left[\frac{1}{2} - \sqrt{6}\,;\, \frac{1}{2} + \sqrt{6}\right]$

En tenant compte des conditions d'existence, on obtient :

$\boldsymbol{S = D \cap S_{(I)} =]-3; 2[\cap \left[\frac{1}{2} - \sqrt{6}\,;\, \frac{1}{2} + \sqrt{6}\right] = \left[\frac{1}{2} - \sqrt{6}\,;\, 2\right[}$ 1p

Résoudre dans ℝ :

b) $\frac{5^x + 5^{-x}}{1 - 5^{-x}} = 5$

Condition d'existence : $1 - 5^{-x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

~~$1 - 5^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 > 5^{-x} \Leftrightarrow 5^0 > 5^{-x} \Leftrightarrow 0 > -x \Leftrightarrow 0 < x \Leftrightarrow x \in D =]0; +\infty[$~~ 0,5p

Domaine :

~~$D =]0; +\infty[$~~ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(\forall x \in D)$:

$\frac{5^x + 5^{-x}}{1 - 5^{-x}} = 5$

$\Leftrightarrow 5^x + 5^{-x} = 5 \cdot (1 - 5^{-x})$

$\Leftrightarrow 5^x + 5^{-x} = 5 - 5 \cdot 5^{-x}$

$\Leftrightarrow 5^x - 5 + 6 \cdot 5^{-x} = 0 \quad | \cdot 5^x \neq 0$

$\Leftrightarrow (5^x)^2 - 5 \cdot 5^x + 6 = 0$ Posons : $t = 5^x > 0$ 2,5p

$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$ $\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 = 1^2$

$\Leftrightarrow t = \frac{5-1}{2}$ ou $t = \frac{5+1}{2}$

$\Leftrightarrow t = 2$ ou $t = 3$ 1p

$\Leftrightarrow 5^x = 2$ ou $5^x = 3$

$\Leftrightarrow 5^x = 5^{\log_5(2)}$ ou $5^x = 5^{\log_5(3)}$

$\Leftrightarrow x = \underbrace{\log_5(2)}_{\approx 0,43 \in D}$ ou $x = \underbrace{\log_5(3)}_{\approx 0,68 \in D}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(5)}$ *ou* $x = \frac{\ln(3)}{\ln(5)}$ $\quad S = \{\log_5(2) ; \log_5(3)\} = \left\{\frac{\ln(2)}{\ln(5)} ; \frac{\ln(3)}{\ln(5)}\right\}$ 2p

Exercice 3 **(4+4+1+2+2+4=17 points)**

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x - x^2}{e^{x-2}}$

1) ***Condition d'existence :***

$e^{x-2} \neq 0$ toujours vrai car $e^{x-2} > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

Domaine :

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ 0,5p

Limites et branches infinies :

Pour $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - x^2}{e^{x-2}} \quad \left(\text{"}\frac{-\infty}{0^+}\text{"}\right)$$
$$= -\infty$$ 0,5p

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - x^2}{x \cdot e^{x-2}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x \cdot (2 - x)}{x \cdot e^{x-2}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - x}{e^{x-2}} \quad \left(\text{"}\frac{+\infty}{0^+}\text{"}\right)$$
$$= +\infty$$ 0,5p

La courbe C_f de f admet une **branche parabolique (B.P.)** (à gauche) **suivant la direction de l'axe des ordonnées (Oy).** 0,5p

Pour $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - x^2}{e^{x-2}} \quad \left(\text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"} f.i.\right)$$
$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - 2x}{e^{x-2}} \quad \left(\text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"} f.i.\right)$$
$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^{x-2}} \quad \left(\text{"}\frac{-2}{+\infty}\text{"}\right)$$
$$= 0^-$$ 1,5p

La courbe C_f de f admet une **asymptote horizontale (A.H.)** (à droite) **d'équation : $y = 0$.** 0,5p

2) $\left(\forall x \in \operatorname{dom} f' = \mathbb{R}\right)$

$$f'(x) = \frac{e^{x-2}\cdot(2-2x) - e^{x-2}\cdot(2x-x^2)}{(e^{x-2})^2}$$

$$= \frac{e^{x-2}\cdot(2-2x-2x+x^2)}{(e^{x-2})^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+2}{e^{x-2}}$$

1,5p

Comme $e^{x-2} > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, la dérivée est du signe de x^2-4x+2.

Résolvons :

$$x^2-4x+2=0 \quad \Delta = 16-4\cdot 1\cdot 2 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{4+2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \underbrace{2-\sqrt{2}}_{\approx 0,59} \text{ ou } x = \underbrace{2+\sqrt{2}}_{\approx 3,41}$$

1p

Tableau des variations :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

0,5p

La fonction f admet un **maximum en $x = 2-\sqrt{2}$**, égal à : 0,5p

$$f\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{2(2-\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})^2}{e^{2-\sqrt{2}-2}} = \frac{4-2\sqrt{2}-\left(4-4\sqrt{2}+2\right)}{e^{-\sqrt{2}}} = 2e^{\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1) \approx 3,41$$

La fonction f admet un **minimum en $x = 2+\sqrt{2}$**, égal à : 0,5p

$$f\left(2+\sqrt{2}\right) = \frac{2(2+\sqrt{2})-(2+\sqrt{2})^2}{e^{2+\sqrt{2}-2}} = \frac{4+2\sqrt{2}-\left(4+4\sqrt{2}+2\right)}{e^{\sqrt{2}}} = -2e^{-\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right) \approx -1,17$$

3) **Intersection avec (Ox) :**

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-x^2}{e^{x-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x\cdot(2-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \ ou \ \ x = 2$$

$\mathcal{C}_f \cap (Ox) = \{O; A\}$

avec $O\left(0; f(0)\right) = O(0;0)$

et $A\left(2; f(2)\right) = A(2;0)$

1p

Intersection avec (Oy) :

$$f(0) = \frac{2\cdot 0 - 0^2}{e^{0-2}} = 0$$

$\mathcal{C}_f \cap (Oy) = \{O\}$

avec $O(0;0) = O$

4) $t_3 \equiv y = f'(3) \cdot (x-3) + f(3)$ avec :

$f(3) = \frac{2\cdot 3 - 3^2}{e^{3-2}} = \frac{6-9}{e} = -\frac{3}{e}$ et $f'(3) = \frac{3^2 - 4\cdot 3 + 2}{e^{3-2}} = \frac{9-12+2}{e} = -\frac{1}{e}$ 1p

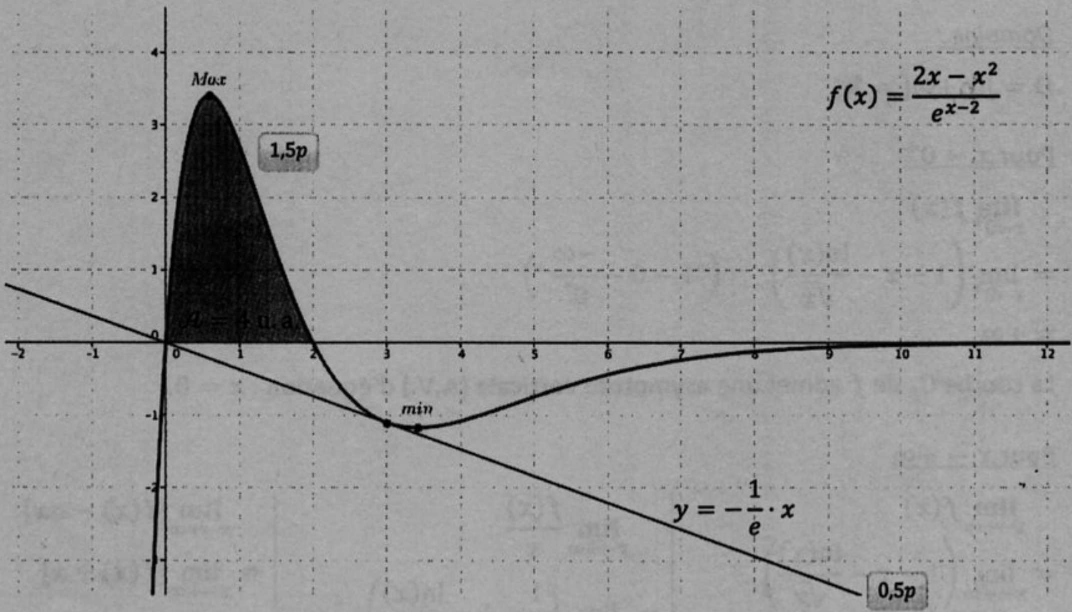
D'où :

$$t_3 \equiv y = -\frac{1}{e} \cdot (x-3) + \left(-\frac{3}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{e} \cdot x + \frac{3}{e} - \frac{3}{e}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y = -\frac{1}{e} \cdot x}$$ 1p

5)



6)

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{2x - x^2}{e^{x-2}}\,dx$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2) \cdot e^{2-x}\,dx$$

IPP avec :
$u(x) = 2x - x^2 \Rightarrow u'(x) = 2 - 2x$
$v'(x) = e^{2-x} \Rightarrow v(x) = -e^{2-x}$

$$= [-e^{2-x} \cdot (2x - x^2)]_0^2 - \int_0^2 (2-2x) \cdot (-e^{2-x})\,dx$$

2p $$= 0 - 0 + \int_0^2 (2-2x) \cdot e^{2-x}\,dx$$

IPP avec :
$u(x) = 2 - 2x \Rightarrow u'(x) = -2$
$v'(x) = e^{2-x} \Rightarrow v(x) = -e^{2-x}$

$$= [-e^{2-x} \cdot (2-2x)]_0^2 - \int_0^2 -2 \cdot (-e^{2-x})\,dx$$

$$= 2 + 2e^2 - 2\int_0^2 e^{2-x}\,dx$$

$$= 2 + 2e^2 - 2[-e^{2-x}]_0^2$$

$$= 2 + 2e^2 - 2[-1 - (-e^2)]$$

$$= 2 + 2e^2 + 2 - 2e^2$$

2p $$= \boldsymbol{4\ u.a.}$$

Exercice 4 **(4+3=7 points)**

1) Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 - x - \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Déterminer le domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de la fonction f.

Conditions d'existence :

- $x > 0$ (il faut que $\ln(x)$ existe)
- $x > 0$ (il faut que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ existe)

Domaine :

$\boldsymbol{D =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*}$ 0,5p

Pour $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(1 - x - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right) \quad \left(\text{"}1 - 0 - \frac{-\infty}{0^+}\text{"}\right)$$
$$= +\infty$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une **asymptote verticale (A.V.) d'équation : $x = 0$.** 0,5p

Pour $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 - x - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$$
$$\left(\text{"}1 - \infty - \frac{+\infty}{+\infty}\text{" } f.i.\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}$$
$$= 0^+$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - x - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$ 1,5p

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - 1 - \frac{\ln(x)}{x\sqrt{x}}\right)$$
$$= -1 = a$$ 0,5p

car :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x\sqrt{x}} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} [f(x) + x]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$$
$$= 1 = b$$ 0,5p

car :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0^+$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une **asymptote oblique (A.O.)** (à droite) **d'équation : $y = -x + 1$** 0,5p

Alternative :

Remarquer que :

$$f(x) = 1 - x - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

$$= 1 - x + \varphi(x) \text{ avec } \varphi(x) = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right) = 0 \text{ (à démontrer!)}$$

2,5p

La courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une **asymptote oblique (A.O.)** (à droite) **d'équation :** $\boldsymbol{y = -x + 1}$ 0,5p

2) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \left(\sqrt{2x}\right)^x$ **Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction f.**

$$g(x) = \left(\sqrt{2x}\right)^x = e^{x\cdot\ln\left(\sqrt{2x}\right)}$$

Condition d'existence :

$\sqrt{2x} > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Domaine :

$\mathbf{dom}\, \boldsymbol{g} =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{dom}\, \boldsymbol{g'} =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ 0,5p

$$\boldsymbol{g'(x)} = e^{x\cdot\ln\left(\sqrt{2x}\right)} \cdot \left(x \cdot \ln\left(\sqrt{2x}\right)\right)'$$

$$= \left(\sqrt{2x}\right)^x \cdot \left(1 \cdot \ln\left(\sqrt{2x}\right) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \left(\sqrt{2x}\right)'\right)$$

$$= \left(\sqrt{2x}\right)^x \cdot \left(1 \cdot \ln\left(\sqrt{2x}\right) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2x}\right)^x \cdot \left(\ln\left(\sqrt{2x}\right) + x \cdot \frac{1}{2x}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2x}\right)^x \cdot \left(\ln\left(\sqrt{2x}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2x}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\ln(2x) + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2x}\right)^x \cdot \frac{\ln(2x) + 1}{2}$$

2,5p

Exercice 5 **(3+3=6 points)**

Calculer les intégrales suivantes (valeur exacte et valeur approchée à 10^{-2} près).	
a) $\displaystyle\int_1^e \frac{(1-x)^2}{x^3}\,dx$	b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan(x))^2\,dx$

$$\int_1^e \frac{(1-x)^2}{x^3}\,dx$$
$$= \int_1^e \frac{1-2x+x^2}{x^3}\,dx$$
$$= \int_1^e \left(x^{-3} - 2x^{-2} + \frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \left[\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{2x^{-1}}{-1} + \ln|x|\right]_1^e$$
$$= \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} + \ln|x|\right]_1^e$$
$$= \left(-\frac{1}{2e^2} + \frac{2}{e} + 1\right) - \left(-\frac{1}{2} + 2 + 0\right)$$
$$= -\frac{1}{2e^2} + \frac{2}{e} - \frac{1}{2}$$
$$\approx 0{,}17$$

3p

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan(x))^2\,dx$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2\tan(x) + \tan^2(x))\,dx$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(x))\,dx + 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$$
$$= [\tan(x)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + 2\cdot(-1)\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$
$$= (1-(-1)) - 2[\ln|\cos(x)|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 2 - 2\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$
$$= 2 - 2\cdot 0$$
$$= 2$$

3p

Ou bien remarquer que $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$ est l'intégrale d'une fonction impaire sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ et que par conséquent $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx = 0$

Exercice 6 **(2+3=5 points)**

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{4x^2+2x+5}{x^3+x}$

1) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$: $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)$:

$$\frac{4x^2+2x+5}{x^3+x} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+2x+5}{x^3+x} = \frac{a(x^2+1)+(bx+c)x}{x(x^2+1)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+2x+5}{x^3+x} = \frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x^3+x}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+2x+5 = (a+b)x^2+cx+a \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ c=2 \\ a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$$

2p

Donc :

$$f(x) = \frac{4x^2+2x+5}{x^3+x} = \frac{5}{x} + \frac{-x+2}{x^2+1}$$

2) Déterminer sur un intervalle I à préciser la primitive F de f qui prend la valeur $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ en $x=-1$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,dx \\
&= \int \frac{4x^2+2x+5}{x^3+x}\,dx \\
&= \int \left(\frac{5}{x} + \frac{-x+2}{x^2+1}\right)dx \\
&= \int \frac{5}{x}\,dx + \int \frac{-x+2}{x^2+1}\,dx \\
&= \int \frac{5}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= 5\ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} + 2\arctan(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R} \\
&= 5\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc : $\boldsymbol{F(x) = 5\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R}}$ 1,5p

Comme $(-1) \in]-\infty;0[$, on calcule la primitive sur $]-\infty;0[$: 0,5p

$F(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 5\ln|-1| - \frac{1}{2}\ln(1+1) + 2\arctan(-1) + k = -\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}\ln(2) + 2\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) + k = -\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{2} + k = -\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{k = \frac{1}{2}\ln(2)}$ 1p

D'où : $\boldsymbol{F(x) = 5\ln(-x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(2)}$ **sur** $]-\infty;0[$.

Exercice 7 **(2+5=7 points)**

On donne les fonctions f et g définies par : $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = (\ln(x))^2$.

1) Calculer les coordonnées des points d'intersections de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f et de la courbe $\mathcal{C}_g$ de g, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à celle de $\mathcal{C}_g$

$f(x) = g(x)$ $\quad\quad domf = domg =]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \ln(x) = (\ln(x))^2$

$\Leftrightarrow \ln(x) - (\ln(x))^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x)\,(1-\ln(x)) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $1 - \ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(1)$ ou $\ln(x) = \ln(e)$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$

donc : $\mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g = \{A; B\}$ avec $A(1; f(1)) = A(1; 0)$ et $B(e; f(e)) = B(e; 1)$ 1p

Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$:

$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \ln(x)\,(1 - \ln(x)) \geq 0$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln(x)\,(1-\ln(x))$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in [1; e]$ et alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$. 1p

2) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par les deux représentations graphiques (valeur exacte et valeur approchée à 10^{-2} $u.a.$ près.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^e (f(x) - g(x))\,dx \\ &= \int_1^e (\ln(x) - (\ln(x))^2)\,dx \\ &= \int_1^e \ln(x)\,dx - \int_1^e (\ln(x))^2\,dx\end{aligned}$$

1p

On a :

$$\int \ln(x)\; dx = x\ln(x) - x + k,\;\; k \in \mathbb{R}$$

1p

et :

$$\int (\ln(x))^2\; dx$$

$$= x(\ln(x))^2 - \int \frac{2\ln(x)}{x}\cdot x\; dx$$

$$= x(\ln(x))^2 - 2\int \ln(x)\; dx$$

$$= x(\ln(x))^2 - 2[x\ln(x) - x] + k,\;\; k \in \mathbb{R}$$

IPP avec :

$u(x) = (\ln(x))^2 \Rightarrow u'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

2p

Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^e \ln(x)\,dx - \int_1^e (\ln(x))^2\,dx \\ &= [x\ln(x) - x]_1^e - \left[x(\ln(x))^2 - 2[x\ln(x) - x]\right]_1^e \\ &= [(e-e) - (0-1)] - \left[(e - 2(e-e)) - (0 - 2(0-1))\right] \\ &= 1 - (e-2) \\ &= \mathbf{3 - e} \\ &\approx \mathbf{0{,}28\ u.a.}\end{aligned}$$

1p