

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2013

Sections: C et D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

Exercice 1

(3+3=6 points)

1) Démontrer que $(\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}), (\forall x \in]0; +\infty[) : \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

2) Calculer, en justifiant, la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{4x}\right)^{1-2x}$

Exercice 2

(6+6=12 points)

Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $\log_3(2-x) - \log_9(9-x^2) \leq \log_3(\sqrt{3})$

b) $\frac{5^x + 5^{-x}}{1 - 5^{-x}} = 5$

Exercice 3

(4+4+1+2+2+4=17 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x - x^2}{e^{x-2}}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f et étudier le comportement asymptotique de f .
- 2) Étudier le sens de variation de f , déterminer le(s) extrema(s) éventuel(s) et dresser le tableau de variation de f .
- 3) Déterminer l'intersection de la courbe \mathcal{C}_f de f avec l'axe des abscisses.
- 4) Déterminer une équation de la tangente t_3 à la courbe \mathcal{C}_f de f au point d'abscisse 3.
- 5) Tracer la courbe \mathcal{C}_f de f ainsi que la tangente t_3 dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
- 6) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe \mathcal{C}_f de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 4

(4+3=7 points)

1) Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 - x - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Déterminer le domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de la fonction f .

2) Soit la fonction g définie par : $g(x) = (\sqrt{2x})^x$

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction f .

Exercice 5

(3+3=6 points)

Calculer les intégrales suivantes et donner à chaque fois la valeur exacte ainsi que la valeur approchée à 10^{-2} près.

a) $\int_1^e \frac{(1-x)^2}{x^3} dx$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan(x))^2 dx$

TOURNER S.V.P. ↩

Exercice 6

(2+3=5 points)

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{4x^2 + 2x + 5}{x^3 + x}$

- 1) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$
- 2) Déterminer sur un intervalle I à préciser la primitive F de f qui prend la valeur $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ en $x = -1$.

Exercice 7

(2+5=7 points)

Dans un repère orthonormé on donne les fonctions f et g définies par : $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = (\ln(x))^2$.

- 1) Calculer les coordonnées des points d'intersections de la courbe C_f de f et de la courbe C_g de g , puis étudier la position de C_f par rapport à celle de C_g .
- 2) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par les deux représentations graphiques (valeur exacte et valeur approchée à 10^{-2} u. a. près).

