Corrige – Mathematiques 2013 – Sections E, F, G

Question I

1. (a) $\overrightarrow{AB}(2;3;-1)$ est un vecteur directeur de d.

$M(x;y;z)\in d$

$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x+1=2k \\ y-3=3k \\ z-3=-k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x=-1+2k \\ y=3+3k \\ z=3-k \end{cases}$

(b)

$$\begin{cases} x=-2+\alpha-\beta \\ y=3\alpha \\ z=5+2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+\alpha-\beta \\ \alpha=\frac{1}{3}y \\ \beta=\frac{1}{2}z-\frac{5}{2} \end{cases}$$

$M(x;y;z)\in\pi \Leftrightarrow x=-2+\frac{1}{3}y-\frac{1}{2}z+\frac{5}{2} \Leftrightarrow 6x-2y+3z-3=0$

$\pi\equiv 6x-2y+3z-3=0$

(c)

$$I(x;y;z)\in\pi\cap d \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y+3z-3=0 \\ x=-1+2k \\ y=3+3k \\ z=3-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6+12k-6-6k+9-3k-3=0 \\ x=-1+2k \\ y=3+3k \\ z=3-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ x=3 \\ y=9 \\ z=1 \end{cases}$$

$\pi\cap d=\{I(3;9;1)\}$

2. $$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+5y-8z=4 \\ -3x-8y+13z=-7 \end{cases} \overset{\substack{(E_2)/(E_2)-2(E_1) \\ (E_3)/(E_3)+3(E_1)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ y-2z=2 \\ -2y+4z=-4 \end{cases} \overset{(E_3)/(E_3)+2(E_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ y-2z=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé.

Posons $z=\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R})$. On a alors : $y=2\alpha+2$ et $x=-\alpha-3$.

$S=\{(-\alpha-3;2\alpha+2;\alpha)\,/\,\alpha\in\mathbb{R}\}$

<u>I.G.</u> : Le système est formé des équations cartésiennes de trois plans dans l'espace sécants suivant la droite passant par $A(-3;2;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;2;1)$.

Question II

1. (a) Nombre d'équipes comportant au ~~plus 4~~ moins 1 élève de la classe A :

$$\underbrace{C_{27}^{5}}_{\substack{choix\\possibles}} - \underbrace{C_{12}^{5}}_{5B} \cdot \underbrace{C_{15}^{0}}_{0A} = \frac{27!}{5!\cdot 22!} - \frac{12!}{5!\cdot 7!} \cdot 1 = 80730 - 792 = 79938$$

(b) Nombre d'équipes comportant 5 élèves de la même classe :

$$\underbrace{C_{15}^{5}}_{5A} \cdot \underbrace{C_{12}^{0}}_{0B} \underbrace{+}_{ou} \underbrace{C_{12}^{5}}_{5B} \cdot \underbrace{C_{15}^{0}}_{0A} = \frac{15!}{5!\cdot 10!} + \frac{12!}{5!\cdot 7!} = 3003 + 792 = 3795$$

2. Nombre de tirages comportant exactement une boule verte :

$$\underbrace{C_{4}^{1}}_{\substack{\text{empl.possibles}\\\text{de la boule verte}}} \cdot \underbrace{A_{10}^{1}}_{\text{boule verte}} \cdot \underbrace{A_{11}^{3}}_{\substack{\text{boules restantes}\\\text{non vertes}}} = 4 \cdot \frac{10!}{9!} \cdot \frac{11!}{8!} = 4 \cdot 10 \cdot 990 = 39600$$

Question III

1. (a) C.E. : $2x-1 \neq 0$ et $\dfrac{4+x}{2x-1} > 0$

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{4+x}{2x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$$D_f = \left]-\infty;-4\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

(b) $D_{f'} = D_f$

$\forall x \in D_{f'}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{4+x}{2x-1}} \cdot \frac{2x-1-(4+x)\cdot 2}{(2x-1)^2} = -\frac{1}{4} + \frac{2x-1}{x+4} \cdot \frac{2x-1-8-2x}{(2x-1)^2} = -\frac{1}{4} + \frac{-9}{(x+4)(2x-1)}$$

$$f'(2) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad f(2) = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

$$y = f(2) + f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} + \ln 2 - \frac{3}{4}\cdot(x-2)$$

Donc $t \equiv y = -\dfrac{3}{4}x + \ln 2 + 1$

2. $\forall x \in \mathbb{R} : \left(e^{3-x}\right)^5 = \sqrt{e} \cdot \dfrac{1}{e^{4x-7}}$

$$\Leftrightarrow e^{15-5x} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-4x+7}$$

$$\Leftrightarrow e^{15-5x} = e^{-4x+\frac{15}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 15-5x = -4x+\frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{15}{2}$$

$$S = \left\{\frac{15}{2}\right\}$$

3. C.E.: $1-x > 0$ et $x > 0$ et $2\text{-}3x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $x > 0$ et $x < \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{2}{3}$

$$D = \left]0;\frac{2}{3}\right[$$

$$\forall x \in D : 2\ln(1-x) - \ln x > \ln(2-3x)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[(1-x)^2\right] > \ln\left[(2-3x)\cdot x\right]$$

$$\Leftrightarrow 1-2x+x^2 > 2x-3x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$S = \left]0;\frac{2}{3}\right[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Question IV

1. $\displaystyle\int \frac{3e^{2x}}{e^{2x}+7}dx$ $\qquad u(x) = e^{2x}+7$, $\quad u'(x) = 2e^{2x}$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+7}dx$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\ln|u(x)| + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\ln\left|e^{2x}+7\right| + k$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\ln\left(e^{2x}+7\right) + k \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R} : e^{2x}+7 > 0$$

2. $\int 5x\cdot\sqrt{x-3}\,dx$ $\qquad u(x)=5x \qquad v'(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

$\qquad u'(x)=5 \qquad v(x)=\frac{2}{3}\cdot(x-3)^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{10}{3}\cdot x(x-3)^{\frac{3}{2}}-\int\frac{10}{3}\cdot(x-3)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$=\frac{10}{3}\cdot x(x-3)^{\frac{3}{2}}-\frac{\cancel{10}^{2}}{3}\cdot\frac{2}{\cancel{5}_{1}}(x-3)^{\frac{5}{2}}+k \quad (k\in\mathbb{R})$

$=\frac{1}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}\left[10x-4(x-3)\right]+k$ ou $\frac{10}{3}x(x-3)\sqrt{x-3}-\frac{4}{3}(x-3)^{2}\sqrt{x-3}+k$

$=\frac{1}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}(6x+12)+k$

$=2(x+2)(x-3)\sqrt{x-3}+k$

Question V

1. $\forall x\in\mathbb{R}$:

$f(x)=g(x)$

$\Leftrightarrow x^2+2=-x^2-2x+6$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Delta=9 \quad x_1=-2 \quad x_2=1$

C_f et C_g se coupent aux points d'abscisses -2 et 1.

2. $\forall x\in[-2;1]: g(x)\geq f(x)$

$A=\int_{-2}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]dx$

$=\int_{-2}^{1}\left(-x^2-2x+6-x^2-2\right)dx$

$=\int_{-2}^{1}\left(-2x^2-2x+4\right)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(-\frac{2}{3}-1+4\right)-\left(\frac{16}{3}-4-8\right)$

$=9$ (unités d'aire)