Corrigé

I

1) $P(z) = z^3 + az^2 + bz + 10 + 10i$

a) $\begin{cases} P(-i) = 0 \\ P(2) = 12-4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i - a - bi + 10 + 10i = 0 \\ 8 + 4a + 2b + 10 + 10i = 12 - 4i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 + 11i - bi \\ 4a + 2b + 6 + 14i = 0 \quad |:2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 + 11i - bi & (1) \\ b = -2a - 3 - 7i & (2) \end{cases}$

$(1) \to (2)$: $b = -20 - 22i + 2bi - 3 - 7i$

$\Leftrightarrow b(1-2i) = -23 - 29i$

$\Leftrightarrow b = \dfrac{-23-29i}{1-2i} \cdot \dfrac{1+2i}{1+2i}$

$\Leftrightarrow b = \dfrac{-23-46i-29i+58}{1+4}$

$\Leftrightarrow b = \dfrac{35-75i}{5}$

$\Leftrightarrow \underline{b = 7 - 15i}$

$\to (1)$: $a = 10 + 11i - 7i - 15 \Leftrightarrow \underline{a = -5 + 4i}$

b) $P(z) = z^3 + (-5+4i)z^2 + (7-15i)z + 10 + 10i$

	1	$-5+4i$	$7-15i$	$10+10i$
$-i$		$-i$	$5i+3$	$-10i-10$
	1	$-5+3i$	$10-10i$	0

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -i$ ou $z^2 + (-5+3i)z + 10 - 10i = 0$

$\Delta = (-5+3i)^2 - 4(10-10i)$
$= 25 - 30i - 9 - 40 + 40i$
$= -24 + 10i$

calcul de δ:

$|\Delta| = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$

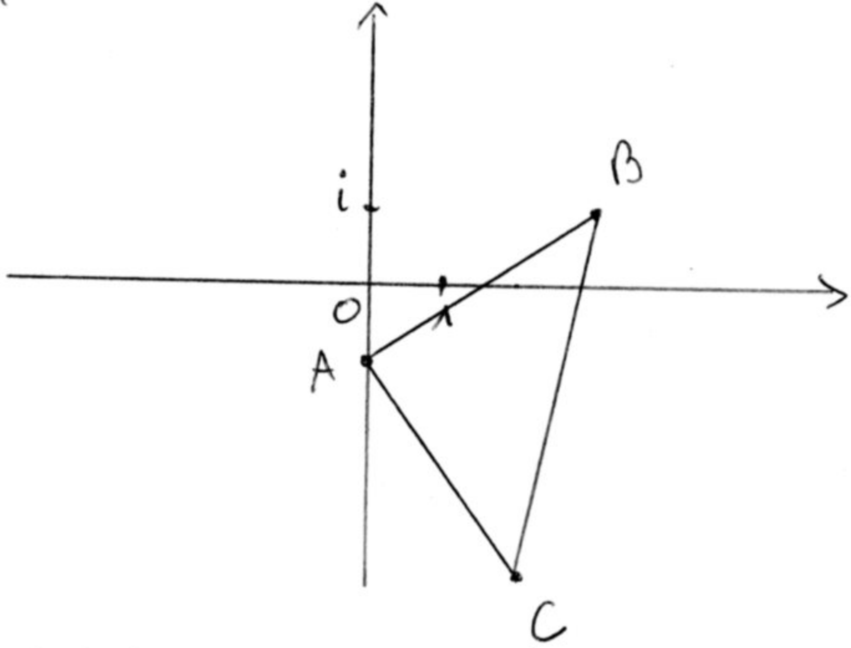
$\delta = \sqrt{\dfrac{26-24}{2}} + i\sqrt{\dfrac{26+24}{2}} = 1 + 5i$

$z' = \dfrac{5 - 3i + 1 + 5i}{2} = 3 + i$

$z'' = \dfrac{5 - 3i - 1 - 5i}{2} = 2 - 4i$

$S = \{-i ; 3+i ; 2-4i\}$

c) $A(-i)$; $B(3+i)$; $C(2-4i)$



$AB = |z_A - z_B| = |-i-3-i| = |-3-2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$AC = |z_C - z_A| = |2-4i+i| = |2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$AB = AC$ donc $\Delta(ABC)$ isocèle en A.

$BC = |z_C - z_B| = |2-4i-3-i| = |-1-5i| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$AB^2 + AC^2 = 13 + 13 = 26 = BC^2$ et d'après la réciproque du théo de Pythagore $\Delta(ABC)$ est rectangle en A.

ou $\widehat{BAC} = \arg \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \arg \dfrac{2-3i}{3+2i} \cdot \dfrac{3-2i}{3-2i} = \arg \dfrac{6-4i-9i-6}{9+4} = \arg \dfrac{-13i}{13}$

$= \arg(-i) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ (2\pi)$

2) a) $Z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, rac. carrées complexes : Z', Z''

$|Z| = \sqrt{2+2} = 2$

$Z' = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$

$Z'' = -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$

b) $|Z| = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\dfrac{\pi}{4} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{4} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{array}\right\} \text{donc } \varphi \equiv \dfrac{5\pi}{4} \ (2\pi)$$

$Z = 2 \operatorname{cis} \dfrac{5\pi}{4}$

r.c.c. : $z_k = \sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{2}$ avec $k = 0, 1$

$z_0 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{5\pi}{8}$

$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{13\pi}{8}$

c) Or $z_0 = z''$ car $\cos\frac{5\pi}{8} < 0$ et $\sin\frac{5\pi}{8} > 0$, d'où :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \\ \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

II

1) $$\left(2x^2 - \frac{1}{4x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x^2)^{10-k} \cdot \left(-\frac{1}{4x}\right)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\, 2^{10-k} \cdot x^{20-2k} \cdot (-1)^k \cdot 4^{-k} \cdot x^{-k}$$

$x^8 = x^{20-2k} \cdot x^{-k} \Leftrightarrow 8 = 20-2k-k \Leftrightarrow k = 4$

D'où terme en x^8 : $C_{10}^4\, 2^6 \cdot (-1)^4 \cdot 4^{-4}\, x^8 = \underline{\frac{105}{2} x^8}$

2) $\Omega = \{$mains de 5 cartes d'un jeu de 32 c.$\}$, $\#\Omega = C_{32}^5$

a) A : "obtenir exact^t 2 rois" $\quad \underbrace{4R}\ \underbrace{28 \text{ autres}}$

$\#A = C_4^2 \cdot C_{28}^3$

$p(A) = \frac{351}{3596} \simeq 0{,}098$

b) B : "obtenir au moins 1R ou au moins 1 ♡"

$\overline{B}$: "n'obtenir ni roi, ni ♡" $\quad \underbrace{11 \text{ rois+coeurs}}\ \underbrace{21 \text{ autres}}$

$\#\overline{B} = C_{21}^5$

$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{C_{21}^5}{C_{32}^5} = \frac{25\,861}{28\,768} \simeq 0{,}899$

c) C : "obtenir au moins 2 ♡"

$\overline{C}$: "obtenir 0 ou 1 coeur" $\quad \underbrace{8 \text{ coeurs}}\ \underbrace{24 \text{ autres}}$

$\#\overline{C} = C_{24}^5 + C_8^1 \cdot C_{24}^4$

$p(C) = 1 - \frac{\#\overline{C}}{\#\Omega} = \frac{1319}{3596} \simeq 0{,}367$

3) épreuve de Bernoulli répétée 4 fois : tirer simultanément 2 boules de l'urne.

succès : tirer 2 noires ou 2 blanches, $p = \frac{1 + C_3^2}{C_5^2} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

échec : tirer 1 noire et 1 blanche, $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

X : nbre de succès (loi binomiale)

$p(X=k) = C_4^k \, 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{4-k}$ pour $k=0,\dots,4$

b) $p(X \geq 2) = p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)$

$= C_4^2\, 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^2 + C_4^3\, 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 + C_4^4\, 0{,}4^4$

$= 0{,}5248$

c) $E(X) = 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6$

III

1) $\mathcal{C} \equiv 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$

$\equiv 4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = 4 + 36 - 4$

$\equiv 4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36$

posons $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y+2 \end{cases}$ $\Omega(1;-2)$

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $\mathcal{C} \equiv 4X^2 + 9Y^2 = 36 \quad |:36$

$\equiv \dfrac{X^2}{9} + \dfrac{Y^2}{4} = 1$

$\mathcal{C}$ = ellipse de centre Ω, d'axe focal (ΩX)

avec : $a = 3$

$b = 2$

$b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow c^2 = 5 \Leftrightarrow c = \sqrt{5}$

$\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

foyers : $F(\sqrt{5}, 0)$, $F'(-\sqrt{5}, 0)$

sommets : $S_1(3,0)$, $S_2(-3,0)$, $S_3(0,2)$

$S_4(0,-2)$

directrices : $d \equiv X = \dfrac{9}{\sqrt{5}} \equiv X = \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$

$d' \equiv X = -\dfrac{9}{\sqrt{5}} \equiv X = \dfrac{-9\sqrt{5}}{5}$

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $F(\sqrt{5}+1, -2)$, $F'(-\sqrt{5}+1, -2)$

$S_1(4,-2)$, $S_2(-2,-2)$, $S_3(1,0)$, $S_4(1,-4)$

$d \equiv x = 1 + \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$

$d' \equiv x = 1 - \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$

2) $\mathcal{H} \equiv y^2 = \frac{x^2}{4} - 1 \equiv \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

centre O, axe focal (Ox)

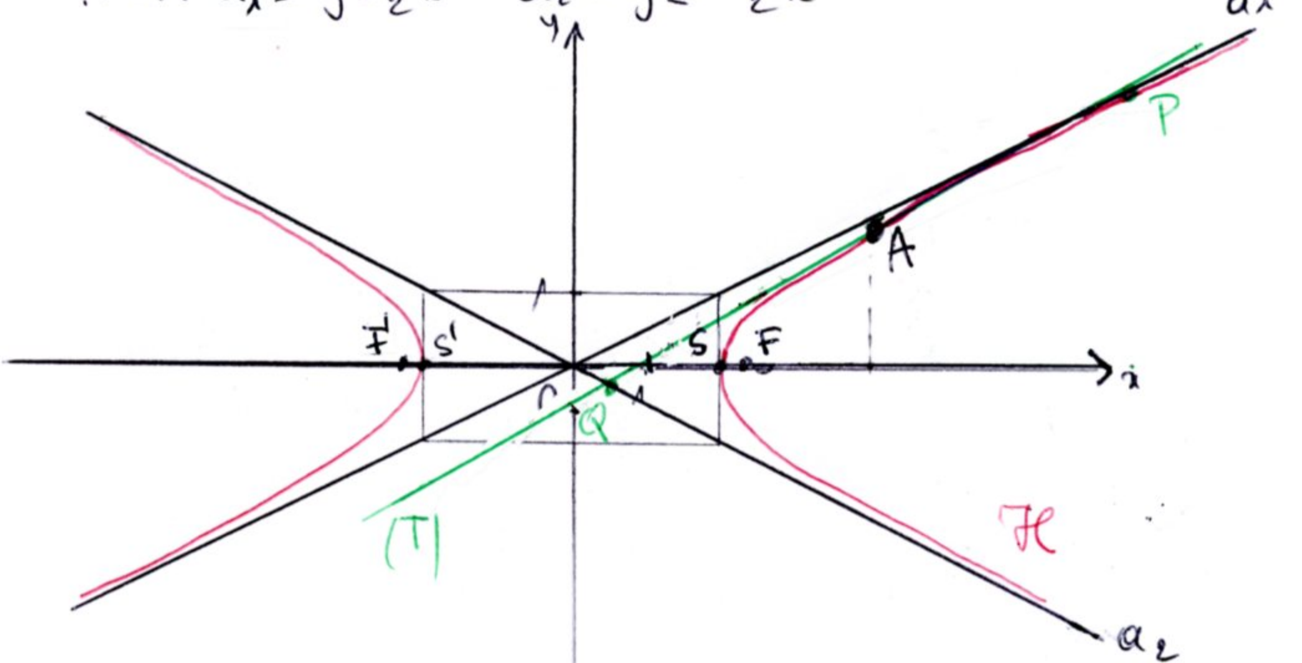
$a = 2,\ b = 1,\ b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow c^2 = 5 \Leftrightarrow c = \sqrt{5}$

$\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$F(\sqrt{5}, 0),\ F'(-\sqrt{5}, 0),\ d \equiv x = \frac{4}{\sqrt{5}},\ d' \equiv x = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

$S(2,0),\ S'(-2,0)$

A.O. : $a_1 \equiv y = \frac{1}{2}x \quad a_2 \equiv y = -\frac{1}{2}x$



$A(4, y) \in \mathcal{H}$ et $y > 0 \Leftrightarrow \frac{16}{4} - y^2 = 1$ et $y > 0 \Leftrightarrow y^2 = 3$ et $y > 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}$

D'où $\underline{A(4, \sqrt{3})}$

$(T) \equiv \frac{4x}{4} - \sqrt{3}y = 1 \equiv \sqrt{3}y = x - 1 \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$P(x,y) \in (T) \cap a_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x & (1) \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} & (2) \end{cases}$

$(1) \to (2)$: $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad |\cdot 6 \Leftrightarrow 3x = 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x(2\sqrt{3} - 3) = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3} \cdot \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{3} + 3}$

$x = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{12 - 9} = 4 + 2\sqrt{3}$

$\to (1)$: $y = 2 + \sqrt{3}$

D'où $\underline{P(4 + 2\sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3})}$.

$Q(x,y) \in a_2 \cap (T) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x & (3) \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} & (4) \end{cases}$

$(3) \to (4) : -\frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad | \cdot 6 \Leftrightarrow -3x = 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow (3+2\sqrt{3})x = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}-3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{12-6\sqrt{3}}{12-9}$

$\Leftrightarrow x = 4-2\sqrt{3}$

$\to (3) : y = -2+\sqrt{3}$

D'où $\underline{Q(4-2\sqrt{3}, \sqrt{3}-2)}$

Soit $M(x_M, y_M)$ le milieu de $[PQ]$, alors :

$x_M = \frac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{2} = 4 = x_A$

$y_M = \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{3}-2}{2} = \sqrt{3} = y_A$

donc $M = A$

IV

1) $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{1+\cos 2t}{2} \end{cases}$ avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y = \cos^2 t$ donc $x^2 + y = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 - y$

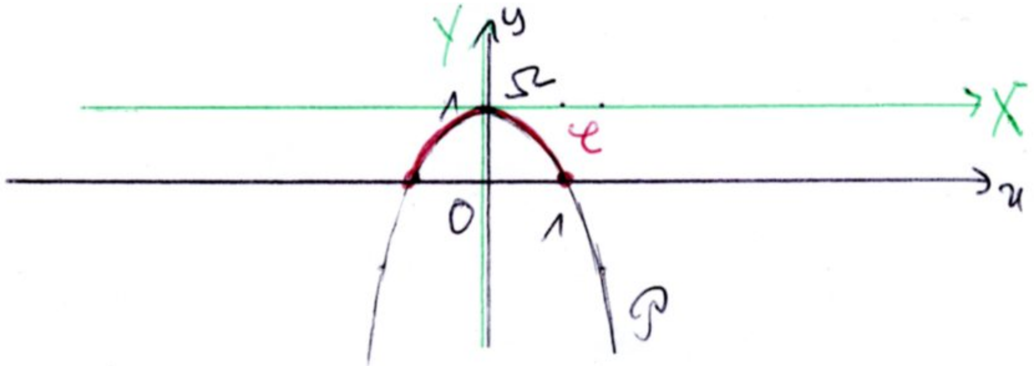
$\Leftrightarrow x^2 = -(y-1) \quad (*)$

posons $\begin{cases} X = x \\ Y = y-1 \end{cases}$ $\Omega(0,1)$

Dans $(\Omega, \vec{i}', \vec{j}')$:

$(*) \Leftrightarrow X^2 = -Y$

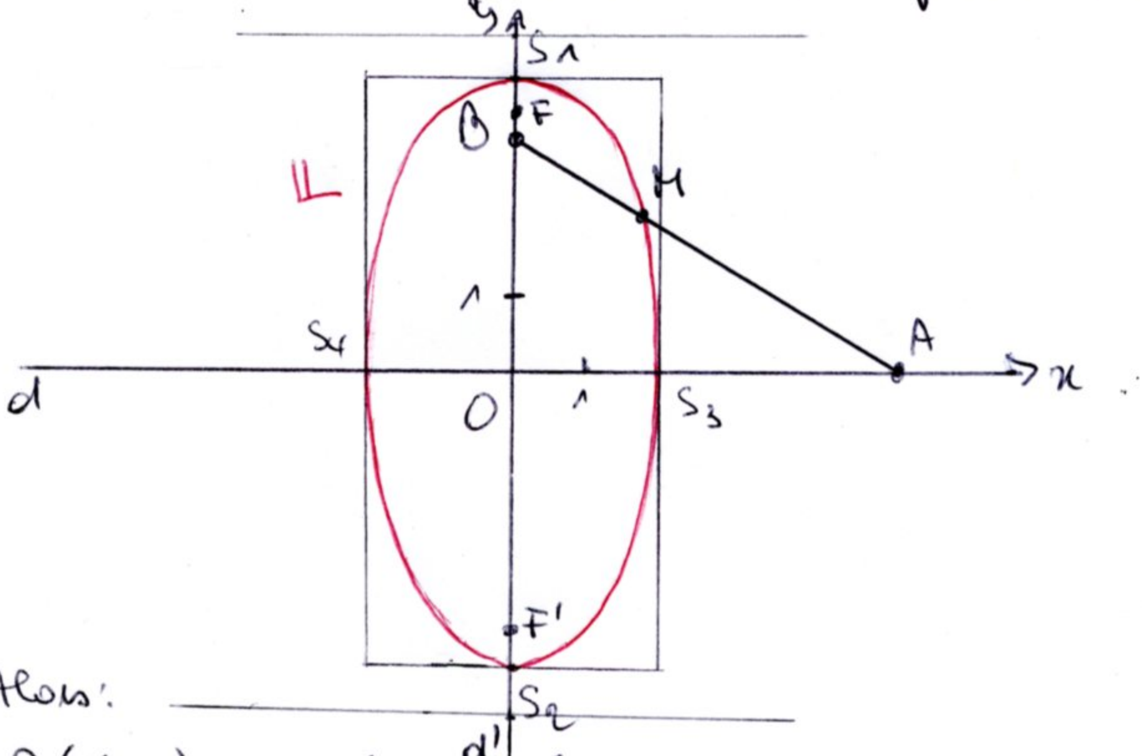
équation de la parabole $\mathcal{P}$ de sommet Ω, d'axe focal (ΩY), de paramètre $p = \frac{1}{2}$, de foyer $F(0, -\frac{1}{4})$ et de directrice $d \equiv Y = \frac{1}{4}$



Or $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le \sin t\le 1 \\ 0\le \cos t\le 1 \end{cases} (1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$

donc $\mathcal{C}$ est la partie de $\mathcal{P}$ située au-dessus de (Ox).

2) Soit le R.O.N. d'origine $O\in d\cap d'$ tel que $d=(Ox)$ et $d'=(Oy)$



Alors :

$A(x_A,0)$ avec $-6\le x_A\le 6$

$B(0,y_B)$ avec $-6\le y_B\le 6$

$AB=6 \Leftrightarrow \sqrt{x_A^2+y_B^2}=6 \Leftrightarrow x_A^2+y_B^2=36$

$M(x,y)$ avec $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y \end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -x_A \\ y_B \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-x_A=-\frac{2}{3}x_A \\ y=\frac{2}{3}y_B \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}x_A \\ y=\frac{2}{3}y_B \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A=3x \\ y_B=\frac{3}{2}y \end{cases}$

D'où : $(3x)^2 + \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 36 \Leftrightarrow 9x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 36 \quad |:36$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$\mathbb{L} = \{M(x,y) \mid \vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}\} = \{M(x,y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1\}$

$\mathbb{L}$ = ellipse de centre O, d'axe focal (Oy) avec :

$a = 4$

$b = 2$

$b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow c^2 = 12 \Leftrightarrow c = 2\sqrt{3}$

$\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$

sommets : $S_1(0,4)$, $S_2(0,-4)$, $S_3(2,0)$, $S_4(-2,0)$

foyers : $F(0, 2\sqrt{3})$, $F'(0, -2\sqrt{3})$

directrices : $y = \frac{8}{\sqrt{3}}$ et $y = -\frac{8}{\sqrt{3}}$