Examen de fin d'études secondaires - Section B - Mathématiques 1

QUESTION 1 (6+(6+3)=15 points)

1) $T = \dfrac{z+zi}{1-iz}$ Condition : $1-iz \neq 0 \Leftrightarrow z \neq \dfrac{1}{i} \Leftrightarrow z \neq -i$

On pose : $z = x + yi$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$T = \frac{x+yi+xi-y}{1-ix+y} = \frac{x-y+xi+yi}{(1+y)-xi} \cdot \frac{(1+y)+xi}{(1+y)+xi}$$

$$= \frac{x-y+xi+yi+xy-y^2+xyi+y^2i+x^2i-xyi-x^2-xy}{(1+y)^2+x^2}$$

$$= \frac{x-y-x^2-y^2}{(1+y)^2+x^2} + i \cdot \frac{x+y+x^2+y^2}{(1+y)^2+x^2}$$

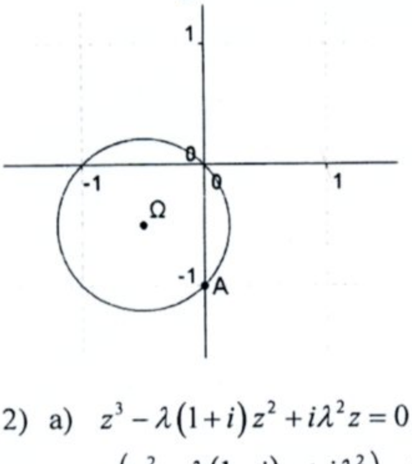
$T \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+x+y^2+y=0$

$\Leftrightarrow x^2+x+\dfrac{1}{4}+y^2+y+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que T soit réel est le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ et

de rayon $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ auquel on a enlevé le point $A(0;-1)$.



2) a) $z^3-\lambda(1+i)z^2+i\lambda^2z=0$

$z\left(z^2-\lambda(1+i)z+i\lambda^2\right)=0$

$z=0$ ou $z^2-\lambda(1+i)z+i\lambda^2=0$

Pour l'équation du second degré : $\Delta=\lambda^2(1+i)^2-4i\lambda^2=\lambda^2(1+2i-1)-4i\lambda^2=-2i\lambda^2$

Racines carrées complexes de $-2i$:

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=-2 \\ a^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b)=(1,-1) \text{ ou } (a,b)=(-1,1)$$

r.c.c. de $-2i$: $1-i$; $-1+i$

D'où : $\Delta = (1-i)^2 \lambda^2 = [(1-i)\lambda]^2$

Solutions de l'équation du second degré :

$$z_1 = \frac{\lambda(1+i) - \lambda(1-i)}{2} = \frac{2\lambda i}{2} = \lambda i$$

$$z_2 = \frac{\lambda(1+i) + \lambda(1-i)}{2} = \frac{2\lambda}{2} = \lambda$$

Ensemble des solutions de l'équation (E) : $S = \{0; \lambda; \lambda i\}$

b) $z_O = 0$; $z_A = \lambda$; $z_B = \lambda i$

$OA = |z_A - z_O| = |\lambda - 0| = |\lambda|$

$OB = |z_B - z_O| = |\lambda i - 0| = |\lambda|$

Comme, $OA = OB$ le triangle OAB est isocèle en O.

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right)(2\pi) = \arg\left(\frac{\lambda i}{\lambda}\right)(2\pi) = \arg(i)(2\pi) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$$

Le triangle OAB est donc aussi rectangle en O.

QUESTION 2 ((2+3)+(2+1+1+2)+4=15 points)

1) a) mains avec le valet de cœur : $\underbrace{C_3^1}_{\text{choix d'un 2e valet}} \cdot \underbrace{C_7^1}_{\text{choix d'un 2e coeur}} \cdot \underbrace{C_{21}^2}_{\text{choix de 2 cartes qui ne sont ni valet ni coeur}} = 4410$

mains sans le valet de cœur : $C_3^2 \cdot C_7^2 \cdot C_{21}^1 = 1323$

nombre de mains contenant exactement deux valets et deux coeurs : 5733

b) choix d'une paire : $\underbrace{8}_{\text{valeur}} \cdot \underbrace{C_4^2}_{\text{choix de deux couleurs}} = 8 \cdot 6 = 48$

Il faut ensuite encore déterminer les trois dernières cartes de telle façon qu'elles soient de valeurs différentes (afin de ne pas créer une deuxième paire). Il faut donc choisir trois valeurs distinctes de $C_7^3 = 35$ façons, puis une carte de chaque valeur de $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ façons.

nombre de mains contenant une paire exactement : $48 \cdot 35 \cdot 64 = 107520$

2) Valeurs prises par X :
+2 (deux blanches)
-1 (une blanche, une noire)
-4 (deux noires)

a) Loi de X :

$$P(X = 2) = \frac{8 \cdot 8}{(n+8)^2} = \frac{64}{(n+8)^2}$$

$$P(X = -1) = \frac{8 \cdot n + n \cdot 8}{(n+8)^2} = \frac{16n}{(n+8)^2}$$

$$P(X = -4) = \frac{n^2}{(n+8)^2}$$

b) $E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i = \dfrac{128 - 16n - 4n^2}{(n+8)^2}$

c) $E(X) = 0 \Leftrightarrow -4n^2 - 16n + 128 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 32 = 0 \Leftrightarrow n = -8$ ou $n = 4$

Pour $n = 4$, l'espérance de X est nulle.

d) Pour $n=4$, $P(X=2)=\frac{64}{144}=\frac{4}{9}$; $P(X=-1)=\frac{64}{144}=\frac{4}{9}$; $P(X=-4)=\frac{16}{144}=\frac{1}{9}$

$$V(X)=\sum_i p_i\cdot\left(x_i-\underbrace{E(X)}_{0}\right)^2=\sum_i p_i\cdot(x_i)^2=\frac{4}{9}\cdot 4+\frac{4}{9}\cdot 1+\frac{1}{9}\cdot 16=4$$

$\sigma(X)=2$

3) Avec 4 parties : schéma de Bernoulli à 4 épreuves ; $p=q=\frac{1}{2}$

$$P(X=k)=C_4^k\left(\frac{1}{2}\right)^4 \qquad k=0,1,\ldots,4$$

$$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}=0,375$$

Avec 8 parties : schéma de Bernoulli à 8 épreuves : $p=q=\frac{1}{2}$

$$P(X=4)=C_8^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{70}{256}\approx 0,273$$

Il est plus probable de gagner 2 parties sur 4 que d'en gagner 4 sur 8.

QUESTION 3 (4+5+6=15 points)

1) $y=\sqrt{x^2-2x}$ $\qquad x\in\left]-\infty;0\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

$$y=\sqrt{x^2-2x}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0\\ y^2=x^2-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0\\ y^2=x^2-2x+1-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0\\ y^2=(x-1)^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0\\ (x-1)^2-y^2=1\end{cases}$$

Poser : $\begin{cases}X=x-1\\ Y=y\end{cases}$

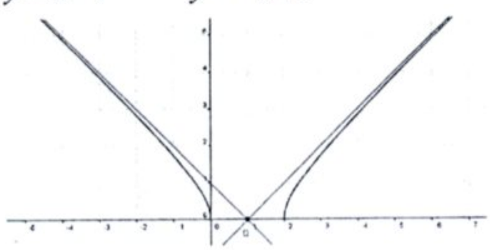
Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ avec $\Omega(1;0)$ dans le repère initial $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'équation de la courbe s'écrit :

$$\begin{cases}\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{1}=1\\ Y\geq 0\end{cases}$$

Il s'agit d'une partie d'hyperbole équilatère ($a=b=1$).

A.O. dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$: $\qquad Y=\pm X$

A.O. dans $(O,\vec{i},\vec{j})$: $\qquad y=x-1 \qquad y=-x+1$



2) $4x|x|+y^2-16x-20=0$

- $\boxed{x \geq 0}$

$4x^2+y^2-16x-20=0$

$4\left(x^2-4x+4\right)+y^2=20+16$

$4\left(x-2\right)^2+y^2=36$

$\dfrac{\left(x-2\right)^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}=1$

Ellipse de centre $\Omega_1\left(2;0\right)$ et d'axe focal parallèle à $\left(Oy\right)$.

- $\boxed{x \leq 0}$

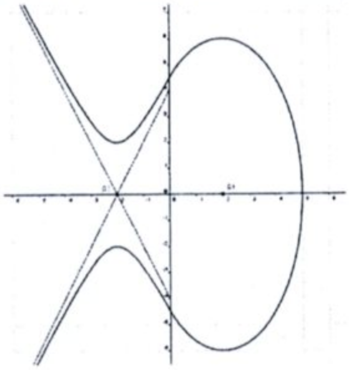
$-4x^2+y^2-16x-20=0$

$-4\left(x^2+4x+4\right)+y^2=20-16$

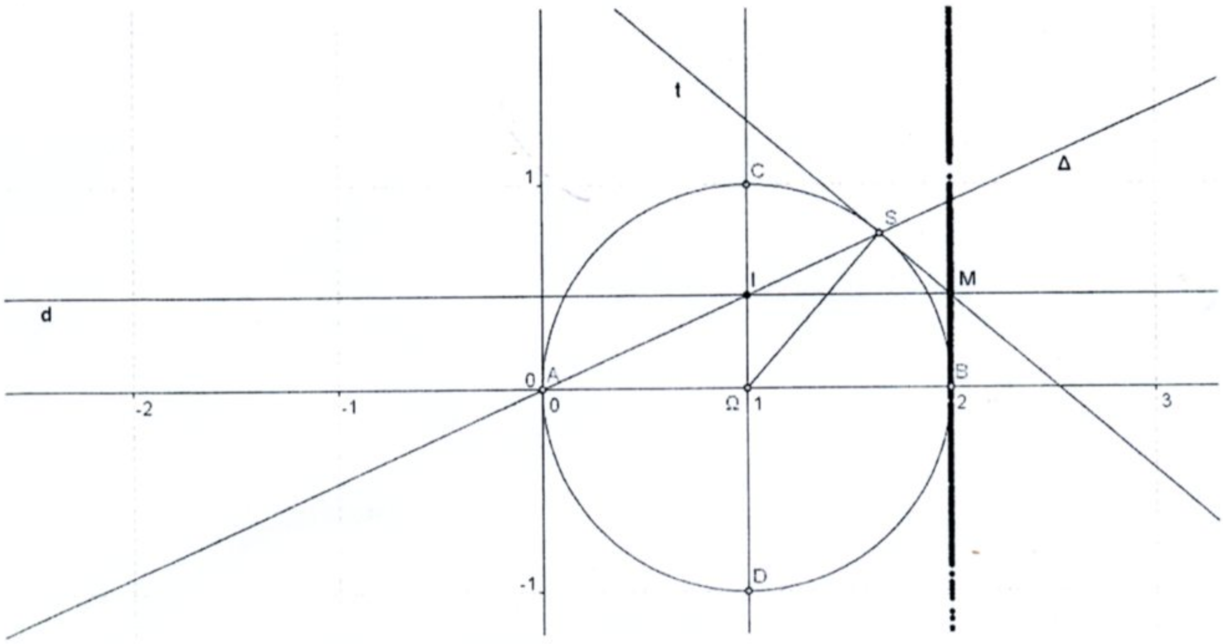
$-4\left(x+2\right)^2+y^2=4$

$-\dfrac{\left(x+2\right)^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}=1$

Hyperbole de centre $\Omega_2\left(-2;0\right)$ de d'axe focal parallèle à $\left(Oy\right)$



QUESTION 4



Choix d'un R.O.N. : voir figure

$A(0;0)$ $\quad B(2;0)$ $\quad C(1;1)$ $\quad D(1;-1)$ $\quad \Omega(1;0)$

Équation de Δ : $\quad y = m \cdot x \quad$ avec $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

Équation du cercle : $(x-1)^2 + y^2 = 1$

Intersection de Δ avec le cercle (point S) :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 & (1) \\ y = mx & (2) \end{cases}$$

(2) dans (1) :

$$(x-1)^2 + m^2x^2 = 1$$
$$x^2 - 2x + 1 + m^2x^2 = 1$$
$$(1+m^2)x^2 - 2x = 0$$
$$x \cdot \left[(1+m^2)x - 2\right] = 0$$
$$\underbrace{x = 0}_{A} \text{ ou } \underbrace{x = \frac{2}{1+m^2}}_{S}$$

D'où : $S\left(\frac{2}{1+m^2}; \frac{2m}{1+m^2}\right)$

Équation cartésienne de la tangente t en S au cercle :

$$P(x;y) \in t \Leftrightarrow \overrightarrow{SP}\left(x - \frac{2}{1+m^2}; y - \frac{2m}{1+m^2}\right) \perp \overrightarrow{\Omega S}\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}; \frac{2m}{1+m^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-m^2}{1+m^2}\left(x - \frac{2}{1+m^2}\right) + \frac{2m}{1+m^2}\left(y - \frac{2m}{1+m^2}\right) = 0 \qquad \left| \cdot (1+m^2) \right.$$

$$\Leftrightarrow (1-m^2)x - \frac{2(1-m^2)}{1+m^2} + 2my - \frac{4m^2}{1+m^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-m^2)x + 2my - 2\frac{1-m^2+2m^2}{1+m^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-m^2)x + 2my - 2 = 0$$

$I(1;m)$

$d \equiv y = m$

Intersection de d et t :

$$\begin{cases} (1-m^2)x + 2my - 2 = 0 & (a) \\ y = m & (b) \end{cases}$$

(b) dans (a) : $\quad (1-m^2)x + 2m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (1-m^2)x = 2(1-m^2) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{m \neq 1 \\ m \neq -1}} x = 2$

Donc : $M(2;m)$ avec $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

Lieu de M : tangente au cercle en B (à l'exception de deux points).