CORRIGÉ:

Exercice 1 : **(11 (5 + 5 + 1) + 11 (4 + 2 + 2 + 3) = 22 points)**

a) $g(x)=-2\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|+\dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}$

1) C.E. : $(x-1)\neq 0$ et $(x-2)\neq 0$ donc: $D_g=IR-\{1;2\}$

Limites :

$$\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}-2\ln\underbrace{\left|\frac{x-1}{x-2}\right|}_{\to 1}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}}_{\to 0}=0$$

Calculs à part: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=1;\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2}=0$

$$\lim_{x\to 1^\pm}-2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1^\pm}\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to\pm\infty}\underbrace{\left(-2\cdot\frac{\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|}{\frac{1}{x-1}}+\frac{2x-1}{(x-2)}\right)}_{\to -1}=\mp\infty$$

Calcul à part: $\lim_{x\to 1^\pm}\dfrac{\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|}{\frac{1}{x-1}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1^\pm}\dfrac{\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x-2)}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1^\pm}\dfrac{\frac{-1}{(x-1)(x-2)}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1^\pm}\frac{x-1}{x-2}=\ 0$

$$\lim_{x\to 2^\pm}-2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2^\pm}\underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\to\pm\infty}\underbrace{\left(-2\cdot\frac{\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|}{\frac{1}{x-2}}+\frac{2x-1}{(x-1)}\right)}_{\to 3}=\pm\infty$$

Calcul à part: $\lim_{x\to 2^\pm}\dfrac{\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|}{\frac{1}{x-2}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 2^\pm}\dfrac{\frac{-1}{(x-1)(x-2)}}{\frac{-1}{(x-2)^2}}=\lim_{x\to 2^\pm}\frac{x-2}{x-1}=\cancel{1}\ 0$

2) $\forall x\in D_g: g'(x)=-2\cdot\frac{-1}{(x-1)(x-2)}+\frac{2(x-1)(x-2)-(2x-1)(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2}$

$=\frac{4(x-1)(x-2)-(2x-1)(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{4x^2-12x+8-4x^2+8x-3}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{-4x+5}{(x-1)^2(x-2)^2}$

Le signe de $g'(x)$ est donc celui de $-4x+5$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{4}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	‖	+	0	-	‖	-	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

max : $g(\frac{5}{4})=2\ln 3-8\cong -5{,}8$

3) Signe de la fonction g.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g(x)$		+	‖	-	‖	+	

b) $f(x)=(1-2x)\cdot\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|$

1) C.E. : $(x-1)\neq 0$ et $(x-2)\neq 0$ donc: $D_f = IR-\{1;2\}$

Limites et asymptotes :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\underbrace{(1-2x)}_{\to\mp\infty}\cdot\underbrace{\ln\left|\underbrace{\tfrac{x-1}{x-2}}_{\to 1}\right|}_{\to 0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|}{\frac{1}{1-2x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-1}{(x-1)(x-2)}}{\frac{2}{(1-2x)^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-(1-2x)^2}{2(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^2}{2x^2}=-2$$

C_f admet une A.H. d'équation : $y=-2$ pour $x\to\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to 1}\underbrace{(1-2x)}_{\to -1}\cdot\underbrace{\ln\left|\underbrace{\tfrac{x-1}{x-2}}_{\to 0}\right|}_{\to -\infty}=+\infty$ C_f admet une A.V. d'équation : $x=1$

$\lim\limits_{x\to 2}\underbrace{(1-2x)}_{\to -3}\cdot\underbrace{\ln\left|\underbrace{\tfrac{x-1}{x-2}}_{\to +\infty}\right|}_{\to +\infty}=-\infty$ C_f admet une A.V. d'équation : $x=2$

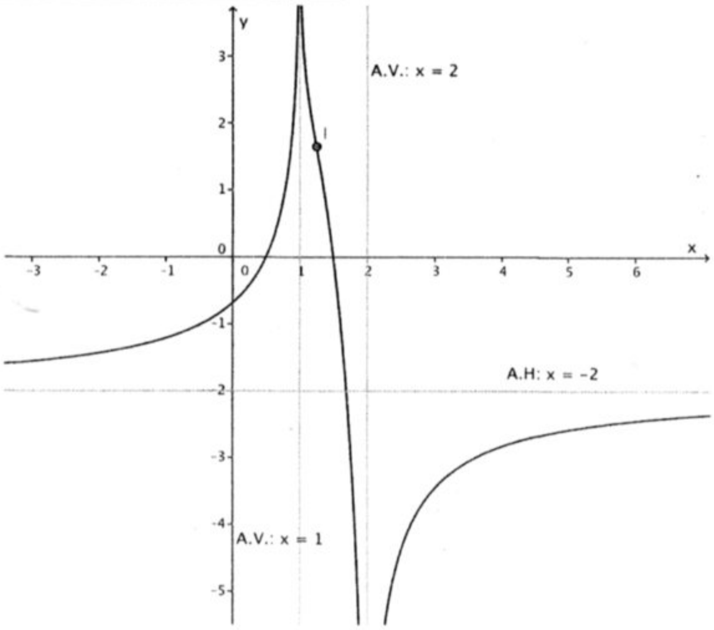
2) $\forall x\in D_f : f'(x)=-2\cdot\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+(1-2x)\frac{-1}{(x-1)(x-2)}=-2\cdot\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}=g(x)$

3)

x	$-\infty$	1 $\frac{5}{4}$	2 $+\infty$
$f'(x)=g(x)$	+	- -	+
$f''(x)=g'(x)$	+	+ 0 -	-
$f(x)$	-2 ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ P.I. ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ -2

P.I. : $f(\frac{5}{4})=\frac{3\ln 3}{2}\cong 1{,}6$

4) Représentation graphique.



x	-3	-2	-1	0	0,5	0,75	1,5	1,75	2,5	3	4
y	-1,56	-1,44	-1,22	-0,69	0,00	0,80	0,00	-2,75	-4,39	-3,47	-2,84

<u>Exercice 2 :</u> **(6 + 3 + 3 + 6 = 18 points)**

a) Résolvez les inéquations suivantes :

1) $8^{x+1}-13\cdot 2^{x+2}+13\cdot 4^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x}>60\cdot 2^{-3x}$

$\Leftrightarrow 2^{3x+3}-13\cdot 2^{x+2}+13\cdot 2^{3-x}>60\cdot 2^{-3x}\ \Big|\cdot 2^{3x}$

$\Leftrightarrow 2^{6x+3}-13\cdot 2^{4x+2}+13\cdot 2^{2x+3}-60>0\ \Big|\cdot 2^{-2}$

$\Leftrightarrow 2^{6x+1}-13\cdot 2^{4x}+13\cdot 2^{2x+1}-15>0$

$\Leftrightarrow 2\cdot\left(2^{2x}\right)^3-13\cdot\left(2^{2x}\right)^2+26\cdot 2^{2x}-15>0$

Poser: $y=2^{2x}\quad (y>0)$

$2y^3-13y^2+26y-15>0$ racine: 1

Par Horner, on trouve: $2y^3-13y^2+26y-15=(y-1)(2y^2-11y+15)=(y-1)(y-3)(2y-5)$

Les racines sont: $1;3;\frac{5}{2}$

y	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$(y-1)$		-	0	+		+		+	
$(2y^2-11y-15)$		+		+	0	-	0	+	
$(y-1)(2y^2-11y-15)$		-	0	+	0	-	0	+	

Ainsi : $1<y<\frac{5}{2}$ ou $y>3$

$\Leftrightarrow 1<2^{2x}<\frac{5}{2}$ ou $2^{2x}>3$

$\Leftrightarrow 0<2x<\log_2\frac{5}{2}$ ou $2x>\log_2 3$

$\Leftrightarrow 0<x<\frac{\log_2 5-1}{2}$ ou $x>\frac{1}{2}\cdot\log_2 3$

$S=\left]0;\frac{\log_2 5-1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2}\log_2 3;+\infty\right[$

2) $\ln\left(e-\ln(1-x)\right)>1\quad (I)$

C.E. : 1) $1-x>0\Leftrightarrow x<1$

2) $e-\ln(1-x)>0\Leftrightarrow \ln(1-x)<e\Leftrightarrow 1-x<e^e\Leftrightarrow x>1-e^e$

$D_I=\left]1-e^e;1\right[$

$\forall x\in D_I:(I)\Leftrightarrow e-\ln(1-x)>e\Leftrightarrow \ln(1-x)<0\Leftrightarrow 1-x<1\Leftrightarrow x>0$

$S=\left]0;1\right[$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^{\left(x^2\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\overbrace{x^2\ln\left(1+\ln\frac{x+1}{x-1}\right)}^{\to+\infty}}=+\infty$

Calcul à part: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(1+\ln\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\ln\frac{x+1}{x-1}\right)}{x^{-2}}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\frac{-2}{(x+1)(x-1)}}{1+\ln\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{-2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x^3}{(x+1)(x-1)}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\frac{1}{\left(1+\ln\frac{x+1}{x-1}\right)}}_{\to1}=+\infty$

c) On a : $(m-1)e^{2x}+me^{x}-2=0$ avec $m\in\mathbb{R}$ (E)

En posant $y=e^{x}$ $(y>0)$, on obtient : $(m-1)y^2+my-2=0$ (*)

Si $m=1$, (*) est du 1^er degré et s'écrit : $y-2=0 \Leftrightarrow y=2$

Donc l'équation (E) admet une seule solution

Si $m\neq 1$, (*) est du 2^e degré :

$$\Delta=m^2+8(m-1)=m^2+8m-8$$

$\delta=64+32=96$;

racines : $m_1=\frac{-8-4\sqrt{6}}{2}=-4-2\sqrt{6}\cong -8{,}9$ et $m_2=\frac{-8+4\sqrt{6}}{2}=-4+2\sqrt{6}\cong 0{,}9$

$S=\frac{-b}{a}=\frac{m}{1-m}$ racines: 0 et 1

$P=\frac{c}{a}=\frac{2}{1-m}$ racine: 1

m	$-\infty$		m_1		0		m_2		1		$+\infty$
Δ		+	0	-		-	0	+	//	+	
S		-		-	0	+		+	//	-	
P		+		+		+		+	//	-	

On a donc :

- Si $m<-4-2\sqrt{6}$: (*) admet deux solutions négatives.
  Donc : (E) n'admet pas de solution
- Si $m=-4-2\sqrt{6}$: (*) admet une solution négative.
  Donc : (E) n'admet pas de solution
- Si $-4-2\sqrt{6}<m<-4+2\sqrt{6}$: (*) n'admet pas de solution.
  Donc : (E) n'admet pas de solution
- Si $m=-4+2\sqrt{6}$: (*) admet une solution strictement positive.
  Donc : (E) admet une seule de solution
- Si $-4+2\sqrt{6}<m<1$: (*) admet deux solutions strictement positives
  Donc : (E) admet 2 solutions
- Si $m>1$: (*) admet deux solutions $y_1>0$ et $y_2<0$
  Donc : (E) admet une seule solution

Résumé :

Si $m<-4+2\sqrt{6}$: (E) n'admet pas de solution

Si $m=-4+2\sqrt{6}$: (E) admet une seule solution

Si $-4+2\sqrt{6}<m<1$: (E) admet deux solutions

Si $m\geq 1$: (E) admet une seule solution

Exercice 3 : **(4 + 10 = 14 points)**

a) $\int_0^{\frac{\Pi}{3}} \frac{3}{1-\sin x} dx$ poser $t=\tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2Arc\tan t$ si $x=0; t=0$

$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{3}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \cancel{dx}\, dt$ si $x=\frac{\Pi}{3}; t=\tan\frac{\Pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{6}{(t-1)^2} dx = \left[\frac{6}{1-t}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{18}{3-\sqrt{3}} - 6 = \frac{18(3+\sqrt{3})}{6} - 6 = 3\left(1+\sqrt{3}\right)$

b) 1) $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int e^{-x}\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x}+k$

$\int\left[f(x)-g(x)\right]dx = \int e^{-x}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

$= \int e^{-x}\cos(2x)dx$ $\quad\left|\begin{array}{ll} u(x)=\cos(2x) & v'(x)=e^{-x} \\ u'(x)=-2\sin(2x) & v(x)=-e^{-x}\end{array}\right.$

$= -e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x)dx$ $\quad\left|\begin{array}{ll} u_1(x)=\sin(2x) & v'(x)=e^{-x} \\ u'_1(x)=2\cos(2x) & v(x)=-e^{-x}\end{array}\right.$

$= -e^{-x}\cos(2x) - 2\left(-e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x)dx\right)$

Donc : $\int e^{-x}\cos(2x)dx = -e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x}\sin(2x) - 4\int e^{-x}\cos(2x)dx$

$5\int e^{-x}\cos(2x)dx = -e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x}\sin(2x) + k'$

$\int\left[f(x)-g(x)\right]dx = \int e^{-x}\cos(2x)dx = \frac{e^{-x}}{5}\left(2\sin(2x)-\cos(2x)\right)+k'$

2) On a : $\begin{cases} \int\left[f(x)+g(x)\right]dx = -e^{-x}+k & (1) \\ \int\left[f(x)-g(x)\right]dx = \frac{e^{-x}}{5}\left(2\sin(2x)-\cos(2x)\right)+k' & (2)\end{cases}$

(1) + (2) : $2\int f(x)dx = -e^{-x} + \frac{e^{-x}}{5}\left(2\sin(2x)-\cos(2x)\right)+k = \frac{e^{-x}}{5}\left(2\sin(2x)-\cos(2x)-5\right)+k$

$\int f(x)dx = \frac{e^{-x}}{10}\left(2\sin(2x)-\cos(2x)-5\right)+k$

(1) – (2) : $2\int g(x)dx = -e^{-x} - \frac{e^{-x}}{5}\left(2\sin(2x)-\cos(2x)\right)+k = -\frac{e^{-x}}{5}\left(2\sin(2x)-\cos(2x)+5\right)+k$

$\int g(x)dx = -\frac{e^{-x}}{10}\left(2\sin(2x)-\cos(2x)+5\right)+k$

Exercice 4 : **(6 points)**

$A(t) = \int_{-1}^{t} f(x)dx = \int_{-1}^{t} \frac{\ln(x+2)}{(x+2)^2}dx$ IPP: $u(x)=\ln(x+2)$ $\quad v'(x)=(x+2)^{-2}$

$u'(x)=\frac{1}{x+2}$ $\quad v(x)=\frac{-1}{x+2}$

$= \left[-\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right]_{-1}^{t} + \int_{-1}^{t}\frac{1}{(x+2)^2}dx$

$= \left[\frac{\ln(x+2)}{x+2} + \frac{1}{x+2}\right]_{t}^{-1}$

$= 1 - \frac{\ln(t+2)}{t+2} - \frac{1}{t+2}$ u.a.

$= 4\cdot\left(1 - \frac{\ln(t+2)}{t+2} - \frac{1}{t+2}\right)$ cm^2

$\lim_{t\to+\infty} A(t) = 4\cdot(1 - \underbrace{\frac{\ln(t+2)}{t+2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{t+2}}_{\to 0}) = 4$ cm^2

Calcul à part: $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t+2)}{t+2} \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t+2} = 0$