Examen de fin d'études secondaires 2014-Section C- Mathématiques I
Corrigé

I. 1) $\underbrace{z^3 + (6-11i)z^2 - 4(7+9i)z - 4(12-5i)}_{P(z)} = 0$

Soit $z_0 = bi$ $(b \in \mathbb{R})$ une solution imaginaire pure.

Alors: $P(z_0) = 0 \Leftrightarrow (bi)^3 + (6-11i)(bi)^2 - 4(7+9i)bi - 4(12-5i) = 0$

$\Leftrightarrow -b^3i - 6b^2 + 11ib^2 - 28bi + 36b - 48 + 20i = 0$

$\Leftrightarrow -6b^2 + 36b - 48 + (-b^3 + 11b^2 - 28b + 20)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6b^2 + 36b - 48 = 0 \\ -b^3 + 11b^2 - 28b + 20 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 6b + 8 = 0 & (1) \\ -b^3 + 11b^2 - 28b + 20 = 0 & (2) \end{cases}$

(1): $\Delta = 36 - 32 = 4$; $b_1 = \frac{6-2}{2} = 2$; $b_2 = \frac{6+2}{2} = 4$

$b = 2$ dans (2): $-8 + 44 - 56 + 20 = 0$

Donc: $z_0 = 2i$ est une solution imaginaire pure et *P(z)* est divisible par $z - 2i$

Schéma de Horner:

	1	$6-11i$	$-28-36i$	$-48+20i$
$2i$		$2i$	$18+12i$	$-20i+48$
	1	$6-9i$	$-10-24i$ ‖	0

Ainsi: $P(z) = (z-2i)\cdot Q(z)$, avec $Q(z) = z^2 + (6-9i)z + (-10-24i)$

Résolvons l'équation: $z^2 + (6-9i)z + (-10-24i) = 0$

$$\Delta = (6-9i)^2 - 4(-10-24i) = 36 - 108i - 81 + 40 + 96i = -5 - 12i$$

Soit $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ une racine carrée complexe de Δ. On obtient le système suivant:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{25+144} = 13 & (1) \\ x^2 - y^2 = -5 & (2) \\ 2xy = -12 & (3) \end{cases}$

(1)+(2): $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

(1)−(2): $2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = 3$ ou $y = -3$

D'après (3) x et y sont de signes contraires.

Donc les racines carrées de Δ sont $2 - 3i$ et $-2 + 3i$.

Ainsi: Les solutions de l'équation $Q(z) = 0$ sont :

$z_1 = \frac{-6+9i+2-3i}{2} = \frac{-4+6i}{2} = -2 + 3i$ et $z_2 = \frac{-6+9i-2+3i}{2} = \frac{-8+12i}{2} = -4 + 6i$

Finalement: $S = \{2i;\ -2+3i;\ -4+6i\}$

2) a) $z=-4\sqrt{2}\cdot\dfrac{1-3i}{2-i}\cdot\dfrac{2+i}{2+i}=\dfrac{-4\sqrt{2}\cdot(2+i-6i+3)}{5}=\dfrac{-4\sqrt{2}\cdot(5-5i)}{5}$

$=-4\sqrt{2}\cdot(1-i)=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$

$|z|=\sqrt{32+32}=\sqrt{64}=8$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi=\dfrac{-4\sqrt{2}}{8}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\\[2ex] \sin\varphi=\dfrac{4\sqrt{2}}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\varphi=\frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

D'où : $z=8\text{cis}\dfrac{3\pi}{4}$

b) Racines cubiques de z :

$z_k=\sqrt[3]{8}\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2k\pi}{3}\right),\ k\in\{0;1;2\}$

$z_0=2\text{cis}\dfrac{\pi}{4}$

$z_1=2\text{cis}\dfrac{11\pi}{12}$

$z_2=2\text{cis}\dfrac{19\pi}{12}$

II. 1) a) $\det A=\begin{vmatrix}2 & 2 & m+1\\ 1 & m & 1-m\\ 6 & 6m & 3m+1\end{vmatrix}$

$=2m\cdot(3m+1)+12\cdot(1-m)+6m\cdot(m+1)-6m\cdot(m+1)-12m\cdot(1-m)-2\cdot(3m+1)$

$=6m^2+2m+12-12m-12m+12m^2-6m-2$

$=18m^2-28m+10$

$\det A=0\Leftrightarrow 18m^2-28m+10=0$

$\Delta=64\ ;\ m_1=\dfrac{28-8}{36}=\dfrac{5}{9}\ ;\ m_2=\dfrac{28+8}{36}=1$

Le système admet donc une solution unique si $m\neq\dfrac{5}{9}$ et $m\neq 1$.

b) Si $m=1$, le système s'écrit :

$$\begin{cases}2x+2y+2z=-1 & (1)\\ x+y=3 & (2)\\ 6x+6y+4z=4 & (3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3 & (2)\\ 2z=-7 & (1)/(1)-2\cdot(2)\\ 4z=-14 & (3)/(3)-6\cdot(2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ z = -\frac{7}{2} \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

En posant $y = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient: $\begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$

Le système est simplement indéterminé: $S = \left\{\left(3 - \alpha; \alpha; -\frac{7}{2}\right) / \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

Interprétation géometrique:

Les équations du système sont celles de trois plans qui se coupent suivant la droite passant par le point $A\left(3; 0; -\frac{7}{2}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires et A, B et C définissent donc un plan π.

$$M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-5 & -3 & -2 \\ y-2 & 5 & -1 \\ z+2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 30\cdot(x-5) + 3\cdot(z+2) - 2\cdot(y-2) + 10\cdot(z+2) + (x-5) + 18\cdot(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 31\cdot(x-5) + 16\cdot(y-2) + 13\cdot(z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 31x - 155 + 16y - 32 + 13z + 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow 31x + 16y + 13z - 161 = 0$$

Finalement :

$$\pi : 31x + 16y + 13z - 161 = 0$$

b) Le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 31 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Un système d'équations cartésiennes est obtenu par : $\dfrac{x-5}{31} = \dfrac{y-2}{16} = \dfrac{z+2}{13}$

$$\begin{cases} 16\cdot(x-5) = 31\cdot(y-2) \\ 13\cdot(x-5) = 31\cdot(z+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 80 = 31y - 62 \\ 13x - 65 = 31z + 62 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 31y = 18 \\ 13x - 31z = 127 \end{cases}$$

III. 1) $\left(7x^2-\dfrac{3}{2x}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}(-1)^k C_8^k\left(7x^2\right)^{8-k}\cdot\left(\dfrac{3}{2x}\right)^k$

$=\sum_{k=0}^{8}(-1)^k C_8^k 7^{8-k}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot x^{16-2k}\cdot x^{-k}$

$=\sum_{k=0}^{8}(-1)^k C_8^k 7^{8-k}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot x^{16-3k}$

Or : $16-3k=10\Leftrightarrow -3k=-6\Leftrightarrow k=2$

Donc le terme en x^{10} s'écrit : $(-1)^2C_8^2\cdot 7^6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot x^{10}=7411887\cdot x^{10}$

2) a) Tirages possibles : C_{25}^3

P(au moins une boule noire)

$=1-\text{P(aucune boule noire)}=1-\dfrac{C_5^0\cdot C_{20}^3}{C_{25}^3}=\dfrac{58}{115}\approx 50{,}435\%$

b) Tirages possibles : $B_{25}^4=25^4$

Tirages favorables : $B_{12}^4+B_5^4+B_8^4$

P(4 boules de la même couleur) $==\dfrac{B_{12}^4+B_5^4+B_8^4}{B_{25}^4}=\dfrac{12^4+5^4+8^4}{25^4}\approx 6{,}517\%$

c) Nombre de tirages comportant 3 boules de la même couleur : $A_{12}^3+A_5^3+A_8^3=1716$

d) Nombre de tirages comportant exactement 1 boule bleue : $\left(A_8^1\cdot A_{17}^2\right)\cdot 3=6528$

ou bien : $\left(C_8^1\cdot C_{17}^2\right)\cdot 3!=6528$ tirages

3) a) P(2 coeurs, 1 carreau) $=\dfrac{C_8^2\cdot C_8^1\cdot C_{16}^2}{C_{32}^5}=\dfrac{120}{899}\approx 13{,}348\%$

b) P(aucun roi) $=\dfrac{C_4^0\cdot C_{28}^5}{C_{32}^5}=\dfrac{1755}{3596}\approx 48{,}804\%$